SOC
7130

BOUND 1939

HARVARD UNIVERSITY

LIBRARY

OF THE

MUSEUM OF COMPARATIVE ZOÖLOGY

167

167

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

MUS. COMP. ZOOLOGY,
CAMBRIDGE, MASS.

DE LIÉGE

Nec temere, nec timide.

TROISIÈME SÉRIE

TOME XI — PREMIÈRE PARTIE

DÉPOTS :

LONDRES,
chez WILLIAMS et NORGATE,
Henrietta Str., 14.

PARIS,
chez HERMANN, libraire,
rue de la Sorbonne, 6.

BRUXELLES
M. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
Rue de Louvain, 112

1921

C.

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE

Nec temere, nec timide.

TROISIÈME SÉRIE

TOME XI — PREMIÈRE PARTIE

DÉPOTS :

LONDRES,
chez WILLIAMS et NORGATE,
Henrietta Str., 14.

PARIS,
chez HERMANN, libraire,
rue de la Sorbonne, 6.

BRUXELLES
M. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
Rue de Louvain, 112

1921

TABLE DES MATIÈRES DU VOLUME XI.

PREMIÈRE PARTIE.

I. — Réponse de l'Université de Liége au manifeste de l'Allemagne intellectuelle au monde civilisé.

II. — Liste des membres de la Société (1921).

III. — Liste des sociétés savantes, revues, etc., avec lesquelles la Société Royale des Sciences de Liége échange ses publications.

MÉMOIRES.

1. — Recherches sur les systèmes triples orthogonaux, par A. Demoulin.

2. — Essais arithmétiques, par E. Schmidt.

3. — Recherches anatomiques sur le *Taraxacum Vulgare* Schrk., par Mlle E. Fritsché.

4. — Observations anatomiques et physiologiques sur le *Crinum Capense* Herb., par R. Beaurieux.

RÉPONSE DE L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE

au Manifeste de l'Allemagne intellectuelle au monde civilisé.

Le Conseil académique de l'Université de Liége saisit l'occasion de sa première réunion depuis que la liberté de parole lui est rendue, pour faire entendre une protestation qu'il lui pèse de retenir depuis plus de quatre années.

Le 4 octobre 1914, la *Gazette de Cologne* publiait, sous le titre de : DAS GEISTIGE DEUTSCHLAND AN DIE KULTURWELT, le manifeste désormais fameux où quatre-vingt-treize savants, écrivains et artistes, couvraient de leur honneur personnel les crimes de l'armée allemande.

Ce document souleva chez les professeurs de l'Université de Liége la plus vive indignation.

Au moment où les signataires du manifeste, au mépris de toute méthode scientifique, affirmaient, sans avoir pris la peine de s'informer, des faits dont ils ne pouvaient vérifier l'exactitude, nous avions, nous, sous les yeux les preuves éclatantes de leur mensonge.

Ils affirmaient que « mille et mille fois, et malgré tous les avertissements, la population belge avait tiré traîtreusement sur les troupes allemandes ».

Nous avions vu, au contraire, que dans nombre de villages du pays de Herve, à Mouland, à Berneau, à Barchon, à Battice, le cri « Man hat geschossen » servait simplement de prétexte à la férocité des soldats.

Plusieurs d'entre nous avaient patiemment, scientifiquement cherché des francs-tireurs et personne n'en avait trouvé un seul. Au contraire, nous avions constaté « mille et mille

fois » que les incendies et les massacres avaient été préparés et exécutés par ordre, à des endroits et à des heures fixés; nous savions que des soldats allemands avaient tiré au moment voulu pour accuser la population belge.

C'est un de nous, M. le Prof^r^ MEURICE, qui subit, comme bourgmestre de Visé, le plus odieux et le plus atroce des martyres, pour avoir répondu de l'innocence de ses administrés, quand les troupes allemandes, après huit jours d'occupation, organisèrent méthodiquement le pillage, le sac et l'incendie de la charmante petite ville, le massacre de 42 citoyens et la déportation de 600 autres.

Nous n'avions pas besoin du témoignage — irrécusable et confirmé d'ailleurs — de nos collègues de Louvain pour mettre en doute que les troupes allemandes eussent « bombardé à contre-cœur une partie de la ville pour exercer des représailles contre une population frénétique qui les attaquait traîtreusement dans leurs logements ».

Nous avions vu autour des locaux universitaires du centre de Liége comment se prépare une échauffourée qui amène des massacres et des incendies de plusieurs rues.

C'est de notre palais académique qu'une troupe allemande affolée tua 17 habitants innocents de la place de l'Université, et c'est là qu'on vit des Allemands repousser dans les flammes des malheureux qui se sauvaient.

Les scènes qui se passèrent les 20 et 21 août 1914 à l'Institut Zoologique et à l'Institut d'Anatomie, où l'un de nous, M. le Prof^r^ DAMAS et son personnel coururent dix fois le danger d'être fusillés, nous édifièrent complètement sur les procédés terroristes de l'armée allemande.

Aussi, quand nous lisions dans le manifeste que les soldats allemands n'avaient jamais porté atteinte à la vie et la propriété d'un seul citoyen belge sans que cela fût commandé par la plus stricte légitime défense, nous pouvions à bon droit crier : mensonge! Et quand on nous traitait

« d'assassins » pour avoir mutilé des blessés, tué des médecins dans l'exercice de leur ministère, nous pouvions crier : calomnie !

Lorsqu'on affirmait ensuite d'une manière générale que ceux qui conduisaient la guerre allemande « ne méconnaissaient pas le droit des gens », nous n'avions qu'à montrer autour de nous comment étaient entendus les Droits de l'occupant : les communes frappées de peines collectives, nos usines dépouillées de leurs machines, les réquisitions dépassant les besoins de la guerre pour appauvrir un concurrent; nous n'avions qu'à montrer nos propres plaies, la façon dont se respectait la propriété privée des établissements consacrés à la science : nos laboratoires de physique, de chimie, de métallurgie dévastés, nos hôpitaux, nos cliniques désorganisés et dilapidés, les vols opérés dans notre bibliothèque et dans nos collections.

Quand on nous disait, enfin, que « les soldats allemands sont étrangers à toute cruauté contraire à la discipline », nous n'avions qu'à parcourir notre pays à quelques kilomètres de distance pour dénombrer les tombes d'enfants, de femmes, de vieillards exécutés comme francs-tireurs, ou écouter le récit des supplices infligés aux victimes avant leur mort.

Et qu'on n'invoque point l'excuse de l'ivresse de la victoire lors de l'invasion. Si ces atrocités ont cessé pendant l'occupation proprement dite, c'est parce que le terrorisme n'était plus jugé nécessaire. Mais nous avons retrouvé la même cruauté et la même perversité dans les traitements appliqués aux prisonniers civils, dans ce crime à jamais inoubliable de la déportation en masse des ouvriers et, tout récemment encore, les explosions retardées et les excès sans nombre commis lors de la retraite des armées.

Faux dans les faits, injurieux dans la forme, le manifeste nous blessait particulièrement dans sa manière de raisonner.

La violation de la neutralité de la Belgique était présentée comme condition de l'existence de l'Allemagne, contre toute vérité, contre toute vraisemblance, — et comme une opération avantageuse au point de vue stratégique, alors qu'il s'agissait d'obligation juridique et d'observation de la parole donnée.

Le militarisme prussien était en outre invoqué comme le soutien de la culture allemande, comme si le génie, la science et l'art dépendaient du nombre de canons et de régiments.

Les quatre-vingt-treize signataires du manifeste ont mis leur honneur en jeu : « Nous conduirons cette guerre en peuple civilisé, disent-ils. Notre nom et notre honneur en sont garants. »

Pour avoir avancé sans preuve et sans critique des faits reconnus inexacts;

Pour avoir haineusement calomnié notre population civile;

Pour avoir invoqué d'ineptes sophismes au service de leur mauvaise cause;

Pour avoir — au moins quelques-uns — signé par ordre ou n'avoir point rétracté quand la vérité leur fut connue;

Ces hommes se sont jugés eux-mêmes, ils se sont déshonorés.

Liége, le 2 décembre 1918.

AU NOM DU CONSEIL ACADÉMIQUE :

Le Pro-Recteur,
A. GRAVIS.

Le Pro-Secrétaire,
O. ORBAN.

L'Administrateur-Inspecteur,
C. LE PAIGE.

Le Rapporteur,
E. MAHAIM.

LISTE

DES

MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ

(JUIN 1921)

Bureau.

Président,	MM. M. Lohest.
Vice-Président,	G. Cesàro.
Secrétaire général,	C. le Paige.
Trésorier-Bibliothécaire,	J. Fairon.

Membres effectifs.

1878 le Paige, C., administrateur inspecteur de l'Université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1880 Neuberg, J., professeur émérite à l'Université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1884 Deruyts, J., professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de Belgique.

Ubaghs, P., docteur en sciences, répétiteur émérite à l'Université.

1885 Gravis, A., professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1887 Lohest, M., professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1897 Cesàro, G., professeur émérite à l'Université, membre de l'Académie royale de Belgique.

Micheels, H., professeur à l'Université de Bruxelles.

1898 Hubert, H., professeur émérite à l'Université, inspecteur général au Corps des mines.

1900 Lonay, H., docteur en sciences, professeur à l'École spéciale de commerce annexée à l'Université.

1902 Dehalu, M., professeur à l'Université, correspondant de l'Académie royale de Belgique.

Fairon, J., professeur à l'Université.

1912 Janne, H., docteur en sciences, chargé de cours à l'Université.

Damas, D., professeur à l'Université.

1919 Fourmarier, P., professeur à l'Université, correspondant de l'Académie royale de Belgique.

1920 Bourgeois, E., professeur à l'Université.

Duchesne, A., professeur à l'Université.

Anten, J., ingénieur géologue, chef de travaux à l'Université.

1921 Fouarge, L., docteur en sciences, chargé de cours à l'Ecole spéciale de commerce annexée à l'Université.

Membres correspondants.

I. — Sciences physiques et mathématiques.

1875 Dewalque, Fr., professeur à l'Université de Louvain.

1876 Balfour, Th.-G.-H., membre de la Société Royale, à Londres.

1877 Tissandier, Gaston, rédacteur du journal *La Nature*, à Paris.

1881 Sébert, à Paris.

Angot, A., directeur du Bureau central météorologique de France, à Paris.

1883 Mittag-Leffler, G., professeur à l'Université de Stockholm.

Gomès Teixeira, F., directeur de l'Académie polytechnique de Porto.

1885 Picquet, répétiteur à l'École polytechnique, à Paris.

Vaněček, J.-S., professeur, à Jičin (Bohême).

1888 Ocagne (Maurice d'), professeur à l'École polytechnique, à Paris.

1898 Korteweg, D.-J., professeur à l'Université d'Amsterdam.

Mathias, Em., professeur à l'Université de Toulouse.

Brocard, H., ancien officier du génie, à Bar-le-Duc.

1902 Versluys, W.-A., docteur en sciences, professeur à l'École polytechnique de Delft.

1904 Lerch, Math., professeur à l'Université de Brünn.

W. Kapteyn, professeur à l'Université d'Utrecht.

1909 Dickstein, S., professeur à Varsovie.

Lebon, E., professeur agrégé de l'Université, à Paris.

Maillet, E., professeur à l'École nationale des ponts et chaussées, à Paris.

1912 Picard, E., membre de l'Institut, à Paris

1912 Painlevé, P., membre de l'Institut, à Paris.

de la Vallée Poussin, Ch., professeur à l'Université de Louvain, membre de l'Académie royale de Belgique.

Demoulin, A., professeur à l'Université de Gand, membre de l'Académie royale de Belgique.

1914 Servais, Cl., professeur à l'Université de Gand, membre de l'Académie royale de Belgique.

1919 Branly, Ed., membre de l'Institut, à Paris.

Fehr, H., professeur à l'Université de Genève.

Pienkowski, S., docteur en sciences, professeur à Varsovie.

1920 Le Chatelier, L., membre de l'Institut, à Paris.

Jordan, C., membre de l'Institut, à Paris.

Goursat, E., membre de l'Institut, à Paris.

II. — Sciences naturelles.

1871 Capellini (commandeur G.), professeur de géologie à l'Université de Bologne, recteur de l'Université.

1873 Areschoug, professeur à l'Université de Lund.

1875 Ray-Lankester, directeur du *British Museum (Natural History)*.

1875 Packard, professeur à l'Université de Salem.

1876 Balfour, I.-B., professeur de botanique à l'Université, à Oxford.

1877 Mac Lachlan, Rob., membre de la Société entomologique, à Londres.

1879 Wetterby, professeur à l'Université de Cincinnati.

Bolivar, I., professeur, à Madrid.

Ritsema, conservateur au Musée royal d'Histoire naturelle, à Leyde.

1881 Taramelli (commandeur), professeur à l'Université de Pavie, recteur de l'Université.

Gestro, Dr R., conservateur au Musée d'Histoire naturelle de Gênes.

Salvadori (comte Th.), professeur à l'Université de Turin.

1884 Trinchese, professeur à l'Université de Naples.

1904 Barrois, C., membre de l'Institut, professeur à l'Université de Lille.

Boule, Marcellin, professeur au Muséum, à Paris.

Portis, A., professeur à l'Université de Rome.

1920 Maquenne, L., membre de l'Institut, à Paris.

LISTE

DES

SOCIÉTÉS SAVANTES, REVUES, ETC.,

AVEC LESQUELLES

LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE LIÉGE

échange ses publications.

BELGIQUE.

Bruxelles. — *Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.*
Observatoire royal.
Société entomologique de Belgique.
Société malacologique de Belgique.
Société royale belge de géographie.
Musée royal d'histoire naturelle.
Société royale belge de botanique.
Société belge de microscopie.

Liége. — *Société géologique.*
Association des élèves des Écoles spéciales.

Mons. — *Société des sciences, des lettres et des beaux-arts du Hainaut.*

DANEMARK.

Copenhague. — *Tidskrift for Mathematik :* Drs Juel et Foldberg (Romersgade, 9).
Académie royale des sciences.

ESPAGNE.

Madrid. — *Real Academia de Ciencias.*

FINLANDE.

Helsingfors. — *Société des sciences de Finlande.*

FRANCE.

Agen. — *Société d'agriculture, sciences et arts.*

Béziers. — *Société d'étude des sciences naturelles.*

Bordeaux. — *Académie des sciences, belles-lettres et arts.*
Société linnéenne.
Société des sciences physiques et naturelles.

Caen. — *Société linnéenne de Normandie.*

Cherbourg. — *Société des sciences naturelles.*

Colmar. — *Société d'histoire naturelle.*

Dijon. — *Académie des sciences.*

Lille. — *Société des sciences, de l'agriculture et des arts*
Université.

Lyon. — *Académie des sciences, des belles-lettres et des arts* (Palais des Arts).
Société d'agriculture.
Société linnéenne.
Université.

Marseille. — *Faculté des Sciences.*

Metz. — *Académie des Sciences, Arts et Agriculture.*

Montpellier. — *Académie des sciences et lettres.*

Nancy. — *Société des sciences* (*ancienne Société des sciences naturelles de Strasbourg*).

Nantes. — *Société des sciences naturelles de l'Ouest de la France.*

Paris. — *Institut de France* (*Académie des Sciences*).
Société philomatique.
Muséum d'histoire naturelle.
Société mathématique de France.
École polytechnique.
L'intermédiaire des mathématiciens (quai des Augustins, 55).

Rouen. — *Société des amis des sciences naturelles.*
Académie des sciences.

Toulouse. — *Académie des sciences.*
Faculté des Sciences.

Troyes. — *Société académique de l'Aube.*

GRANDE-BRETAGNE ET IRLANDE.

Cambridge. — *Philosophical Society.*

Dublin. — *Royal Irish Academy.*
Royal Society.

Édimbourg. — *Geological Society.*
Mathematical Society.

Glasgow. — *Natural history Society.*
Philosophical Society.

Londres. — *Geological Society.*
Linnean Society.
Royal Society.

Manchester. — *Literary and philosophical Society.*

ITALIE.

Bologne. — *Accademia delle Scienze* (classe des sciences physiques et mathématiques).
Accademia delle Scienze (classe des sciences morales).

Catane. — *Accademia gioenia di Scienze naturali.*

Florence. — *Institut supérieur.*

Gênes. — *Reale Universita.*

Modène. — *Societa dei naturalisti.*

Milan. — *Reale istituto lombardo di Scienze e Lettere.*
Societa lombarda di Scienze mediche e biologiche.

Naples. — *Societa Reale.*

Palerme. — *Societa di Scienze naturali ed economiche, Regia Università.*
Circolo matematico.

Pise. — *Societa di scienze naturali.*
Nuovo Cimento, rédacteurs : MM. Betti et Felici.

Portici. — *Reale scuola superiore die agricultura.*

Rome. — *Reale Accademia de Lincei.*
Accademia pontificia de' Nuovi Lincei.
R. Comitato geologico d'Italia.
Société italienne pour l'avancement des Sciences.

Turin. — *Reale Academia delle Scienze.*

LUXEMBOURG.

Luxembourg. — *Institut royal Grand-Ducal, section des sciences naturelles et mathématiques.*
Société des naturalistes luxembourgeois.

NÉERLANDE.

Amsterdam. — *Koninklijke Academie van wetenschappen.*
Société mathématique.

Delft. — *Académie technique.*

Harlem. — *Société hollandaise des sciences.*
Musée Teyler.

Rotterdam. — *Bataafsch Genootschap der proefondervindelijke wijsbegeerte.*

NORVÈGE.

Bergen. — *Museum.*

Christiania. — *Kongelige Frederiks Universitet.*
Videnskabs Selskabst.

Göteborg. — *Kongl. Vetenskaps och Vitterhetssamhälle.*

Stavanger. — *Museum.*

Throndhjem. — *K. Norske Videnskabers Selskabs.*

POLOGNE.

Cracovie. — *Académie des sciences.*

Varsovie. — *Wiadomosci matematyczne*

PORTUGAL.

Lisbonne. — *Académie des sciences.*

Porto. — *Académie polytechnique*, directeur : M. Gomès Teixeira

ROUMANIE.

Bucharest. — *Académie roumaine*

Kischinew. — *Société des naturalistes de Bessarabie.*

RUSSIE.

Kazan. — *Société physico-mathématique*

Kharkoff. — *Société mathématique.*

Juriew. — *Université.*

Moscou. — *Société impériale des naturalistes.*

Saint-Pétersbourg. — *Académie impériale des sciences.*
Archives des sciences biologiques.
Société d'archéologie et de numismatique.
Société entomologique.

SUÈDE.

Stockholm. — *Académie royale des sciences.*
Entomologiska föreningen, 94, Drottninggatan.
Acta mathematica, rédacteur : M. Mittag-Leffler

Upsal. — *Société royale des Sciences.*

SUISSE.

Berne. — *Naturforschende Gesellschaft.*
Société helvétique des sciences naturelles.

Genève. — *L'enseignement mathématique*, directeurs : MM. Fehr et Buhl.

Neuchâtel. — *Société des sciences naturelles*

Zurich. — *Naturforschende Gesellschaft.*

TCHÉCO-SLOVAQUIE.

Prague. — *Ceske Académie*
Société royale des sciences de Bohême.

YOUGO-SLAVIE.

Agram. — *Académie Sudo-Slave des sciences.*

AMÉRIQUE.

—

ÉTATS-UNIS.

Arbor (Mich). — *University of Michigan (Library).*

Austin. — *Texas Academy of sciences.*

Baltimore. — *American Journal of mathematics. (Johns Hopkins University.)*

Berkeley (Col.) — *University of California (Press).*

Boston. — *American Academy of arts and sciences.*
Society of natural History.

Cambridge (Mass.). — *Museum of comparative Zoology.*

Chicago. — *Field Museum of natural history.*
University of Chicago (Libraries).

Cincinnati (O.) — *American association for the advancement of sciences.*

Cold Spring Harbor (N.Y.). — *Carnegie Institution (station for experimentale evolution).*

Colorado. — *Colorado College* (bureau des publications).

Des Moines (Iowa). — *Geological Survey.*

Lawrence (Kan). — *The Kansas University (Science Bulletin).*

Lincoln (Neb.). — *University of Nebraska.*

Madison. — *Wisconsin Academy of sciences, letters and arts.*
Geological Survey.

New-Haven. — *Connecticut Academy of arts and sciences.*

New-York. — *Academy of sciences.*
Museum of natural history.
American Mathematical Society.

Philadelphie. — *Academy of natural sciences.*
American philosophical Society.
Wagner free Institute of sciences.

Portland. — *Natural History Society.*

Rochester. — *Academy of sciences.*

Saint-Louis (Mo). — *Botanical Garden.*

Salem. — *Essex Institute.*

San-Francisco. — *Californian Academy of sciences.*

Urbana (Ill.). — *University of Illinois library.*

Washington. — *Smithsonian Institution.*
Bureau of ethnology.

BRÉSIL.

Rio de Janeiro. — *Collège Pedro II.*

CANADA.

Halifax. — *Nova Scotian Institute of natural Science.*

Ottawa. — *Geological Survey of Canada.*

Toronto. — *Canadian Institute.*

CHILI.

Santiago. — *Société scientifique du Chili.*

MEXIQUE.

Merida. — *Observatoire.*

Mexico. — *Société Antonio Alzate.*
Observatoire météorologique central.

Tacubaya. — *Observatoire national.*

RÉPUBLIQUE ARGENTINE.

Buenos-Ayres. — *Universidad.*

La Plata. — *Facultad de Cincias fisicos, matemáticas y astronómicas.*

URUGUAY.

Montevideo. — *Museo de historia natural.*

ASIE.

INDES ANGLAISES.

Calcutta. — *Asiatic Society of Bengal.*

JAPON.

Sendaï. — *Tôhoku impérial University.*

SIBÉRIE.

Irkutsk. — *Ostsibirische Abtheilung der K. Russischen geographischen Gesellschaft.*

SYRIE.

Damas. — *Académie arabe.*

OCÉANIE.

AUSTRALIE.

Adelaïde. — *Royal Society of South Australia.*

Hobart-Town. — *Tasmania society of natural sciences.*

Melbourne. — *Observatoire.*

Sydney. — *Australian Association for advancement of science*
Linnean Society.
Royal Society of New South Wales.

ILES PHILIPPINES.

Manille. — *Philippine Journal of Sciences.*

INDES HOLLANDAISES.

Batavia. — *Koninklijke natuurkundige vereeniging in Nederlandsch Indië.*

Koninklijke magnetisch en meteorologisch Observatorium.

RECHERCHES

SUR LES

SYSTÈMES TRIPLES ORTHOGONAUX

PAR

A. DEMOULIN

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE GAND

MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

RECHERCHES

SUR LES

SYSTÈMES TRIPLES ORTHOGONAUX

SECTION I.

Sur diverses propriétés caractéristiques des familles de Lamé.

I.

1. Soit (S) une surface variable dépendant d'un paramètre ρ_2. Désignons par u et v les paramètres de ses lignes de courbure (*). M étant un point quelconque de la surface, envisageons le trièdre trirectangle Mxyz dont les arêtes Mx, My sont respectivement tangentes aux lignes de courbure $v = \text{const.}$, $u = \text{const.}$ qui se croisent en ce point. Les translations et rotations de ce trièdre sont

lorsque u varie seul,	A, 0, 0, 0, q, r;
lorsque v varie seul,	0, C, 0, p_1, 0, r_1;
lorsque ρ_2 varie seul,	ξ_2, r_{12}, ζ_2, p_2, q_2, r_2.

(*) Si (S) est un plan ou une sphère, on prendra pour réseau (u, v) un réseau orthogonal quelconque.

Ces quantités sont liées par les dix-sept relations suivantes :

$$\frac{\partial p_1}{\partial u} = -qr_1,$$

$$\frac{\partial q}{\partial v} = rp_1, \tag{1}$$

$$\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = -qp_1,$$

$$\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial v} = -\mathrm{C}r, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial u} = \mathrm{A}r_1, \tag{3}$$

$$\frac{\partial r}{\partial \rho_2} - \frac{\partial r_2}{\partial u} = -qp_2,$$

$$-\frac{\partial p_2}{\partial u} = qr_2 - rq_2,$$

$$\frac{\partial q}{\partial \rho_2} - \frac{\partial q_2}{\partial u} = rp_2,$$

$$\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \rho_2} - \frac{\partial \xi_2}{\partial u} = -r\eta_2,$$

$$-\frac{\partial \eta_2}{\partial u} = r\xi_2 - \mathrm{A}r_2, \tag{4}$$

$$-\frac{\partial \zeta_2}{\partial u} = -q\xi_2 + \mathrm{A}q_2, \tag{5}$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial \rho_2} = -q_2p_1,$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial v} - \frac{\partial p}{\partial \rho_2} = q_2r_1,$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial v} = r_2p_1 - p_2r_1, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial v} = -r_2 C + \eta_{12} r_1, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \eta_{12}}{\partial v} - \frac{\partial C}{\partial \rho_2} = \zeta_2 p_1 - \xi_2 r_1,$$

$$\frac{\partial \zeta_2}{\partial v} = p_2 C - \eta_{12} p_1. \tag{8}$$

Les composantes δx, δy, δz du déplacement infiniment petit d'un point de coordonnées relatives x, y, z ont pour expressions

$$\begin{aligned}
\delta x &= dx + A du + \xi_2 d\rho_2 + (q du + q_2 d\rho_2) z - (r du + r_1 dv + r_2 d\rho_2) y, \\
\delta y &= dy + C dv + \eta_{12} d\rho_2 + (r du + r_1 dv + r_2 d\rho_2) x - (p_1 dv + p_2 d\rho_2) z, \\
\delta z &= dz \qquad\quad + \zeta_2 d\rho_2 + (p_1 dv + p_2 d\rho_2) y - (q du + q_2 d\rho_2) x.
\end{aligned}$$

L'élément linéaire de l'espace, exprimé en fonction des paramètres u, v, ρ_2, est donné par la formule

$$ds^2 = (A du + \xi_2 d\rho_2)^2 + (C dv + \eta_{12} d\rho_2)^2 + \zeta_2^2 d\rho_2^2. \tag{9}$$

2. Supposons que les surfaces (S) ne soient ni des plans, ni des sphères et qu'elles forment une famille de Lamé. Les équations différentielles de leurs trajectoires orthogonales sont

$$\begin{cases} A du + \xi_2 d\rho_2 = 0, \\ C dv + \eta_{12} d\rho_2 = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Si M décrit une de ces trajectoires, Mx engendre une série développable dont le plan tangent le long de Mx est nécessairement le plan xMz (*). On a donc, pour un point quelconque (x, 0, 0) de Mx,

$$C dv + \eta_{12} d\rho_2 + (r du + r_1 dv + r_2 d\rho_2)\, x = 0.$$

(*) Si les surfaces (S) sont des plans ou des sphères, Mx *pourra* engendrer une développable.

Remplaçant, dans cette égalité, du et dv par leurs valeurs tirées des équations (10), il vient

$$(11) \qquad C r \xi_2 + A r_1 \eta_2 - AC r_2 = 0 \ (*).$$

La relation (11) est une condition nécessaire pour que la surface (S) engendre une famille de Lamé. Je dis qu'elle est suffisante.

En effet, si l'on tient compte de cette relation, les équations (7) et (4) s'écrivent

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial v} = -\frac{C r \xi_2}{A}, \qquad \frac{\partial \eta_2}{\partial u} = \frac{A r_1 \eta_2}{C}$$

ou, en vertu des équations (2) et (3),

$$\frac{\frac{\partial \xi_2}{\partial v}}{\xi_2} = \frac{\frac{\partial A}{\partial v}}{A}, \qquad \frac{\frac{\partial \eta_2}{\partial u}}{\eta_2} = \frac{\frac{\partial C}{\partial u}}{C}.$$

On déduit de là

$$\xi_2 = A\varphi(u, \rho_2), \quad \eta_2 = C\psi(v, \rho_2).$$

Portant ces valeurs de ξ_2 et de η_2 dans la formule (9), il vient

$$ds^2 = A^2[du + \varphi(u, \rho_2) d\rho_2]^2 + C^2[dv + \psi(v, \rho_2) d\rho_2]^2 + \zeta_2^2 d\rho_2^2.$$

Il existe des fonctions $\mu(u, \rho_2)$, $\mu_1(v, \rho_2)$ telles qu'on ait

$$\mu[du + \varphi(u, \rho_2) d\rho_2] = d\rho,$$
$$\mu_1[dv + \psi(v, \rho_2) d\rho_2] = d\rho_1.$$

(*) On est conduit aussi à la relation (11) lorsqu'on exprime que My engendre une série développable.

Si l'on tient compte de ces relations, l'expression ci-dessus de ds^2 devient

$$ds^2 = \frac{A^2}{\mu^2} d\rho^2 + \frac{C^2}{\mu_1^2} d\rho_1^2 + \zeta_2^2 d\rho_2^2$$

et, par suite, la surface (S) engendre une famille de Lamé. C. Q. F. D.

On voit, en outre, que pour déterminer les familles de Lamé de paramètres ρ, ρ_1, il faut intégrer les équations différentielles

$$du + \varphi(u, \rho_2) d\rho_2 = 0, \qquad dv + \psi(v, \rho_2) d\rho_2 = 0.$$

3. Des considérations qui précèdent résulte le théorème suivant, d'ailleurs bien connu :

Pour que les surfaces (S) *forment une famille de Lamé, il suffit que, lorsque le point* M *décrit une quelconque de leurs trajectoires orthogonales, la droite* Mx (*ou la droite* My) *engendre une série développable.*

Ce théorème entraîne comme conséquence immédiate la réciproque du théorème de Dupin, due à M. Darboux (*) :

Si l'on a deux familles de surfaces se coupant à angle droit et si les lignes d'intersection des surfaces qui appartiennent à deux familles différentes sont lignes de courbure sur les surfaces de l'une des deux familles, il existe une troisième famille formée de surfaces coupant les précédentes à angle droit.

II.

4. Soit M un point quelconque d'une courbe (C) tracée sur une surface. Nous appellerons *sphère de courbure géodésique* de la courbe (C) en M la sphère qui passe par M et qui a pour

(*) G. Darboux, *Leçons sur les systèmes orthogonaux*, p. 10, n° 6.

centre le centre de courbure géodésique de la courbe (C) en M.

Cette sphère est caractérisée par les propriétés suivantes : 1° elle est orthogonale à la surface au point M ; 2° elle renferme le cercle osculateur de (C) en M.

Il suit de là que les sphères de courbure géodésique d'une courbe sont conservées dans toute transformation conforme.

5. Reportons-nous au paragraphe 1 et envisageons les lignes de courbure $v = \text{const.}$, $u = \text{const.}$ de la surface (S) qui passent par le point M. Soient G, G′ leurs centres de courbure géodésique et (S_G), $(S_{G'})$ leurs sphères de courbure géodésique en ce point (*).

L'abscisse G du point G et l'ordonnée G′ du point G′ ont pour valeurs

$$G = \frac{A}{r}, \qquad G' = -\frac{C}{r_1}.$$

Les équations des sphères (S_G), $(S_{G'})$ sont

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2yG = 0,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xG' = 0.$$

La caractéristique (Γ) de la sphère (S_G) correspondant à un déplacement $(du, dv, d\rho_2)$ du point M appartient au plan défini par l'équation

$$\begin{aligned} &x[A du + \xi_2 d\rho_2 + (q du + q_2 d\rho_2)z - (r du + r_1 dv + r_2 d\rho_2)y] \\ &+ y[C dv + \eta_2 d\rho_2 + (r du + r_1 dv + r_2 d\rho_2)x - (p_1 dv + p_2 d\rho_2)z] \\ &+ z[\zeta_2 d\rho_2 + (p_1 dv + p_2 d\rho_2)y - (q du + q_2 d\rho_2)x] \\ &- [C dv + \eta_2 d\rho_2 + (r du + r_1 dv + r_2 d\rho_2)x - (p_1 dv + p_2 d\rho_2)z]G \\ &= y dG \ (**). \end{aligned}$$

(*) Il résulte du théorème démontré au n° 4 que les sphères de courbure géodésique des lignes de courbure sont conservées dans toute transformation conforme.

(**) Pour obtenir cette équation, nous nous sommes appuyé sur la remarque suivante : *Soit* $f(x, y, z, t) = 0$ *l'équation d'une surface rapportée à*

La sphère (S_G) étant orthogonale à la sphère $(S_{G'})$, pour que le cercle (Γ) soit orthogonal à $(S_{G'})$, il faut et il suffit que, parmi les sphères passant par (Γ), il y en ait une seconde qui soit orthogonale à $S_{G'}$); en particulier, il faut et il suffit que le plan de (Γ) passe par le point G'. Cette dernière condition s'exprime par l'égalité

$$(12) \qquad (Cr\xi_2 + Ar_1\eta_2 - ACr_2)d\rho_2 = 0.$$

Si la surface (S) engendre une famille de Lamé, la relation (11) a lieu; par suite, la relation (12) est vérifiée et la caractéristique de (S_G) est orthogonale à $(S_{G'})$. Donc :

Si une surface (S) *engendre une famille de Lamé, la caractéristique de la sphère* (S_G), *relative à un déplacement quelconque du point* M, *est orthogonale à la sphère* $(S_{G'})$.

Il est clair qu'en raisonnant sur $(S_{G'})$, on trouverait que sa caractéristique est orthogonale à (S_G) (*).

Supposons à présent que, pour un seul déplacement $(du, dv, d\rho_2)$ du point M, extérieur à la surface, la caractéristique de (S_G) soit orthogonale à $(S_{G'})$. Dans ce cas, la relation (12) sera vérifiée et, comme $d\rho_2$ est $\neq 0$, elle entraînera l'égalité (11), laquelle exprime que la surface (S) engendre une famille de Lamé.

---

un trièdre trirectangle mobile dépendant d'un paramètre t *et dont* ξ, η, ζ, p, q, r *sont les translations et les rotations. La caractéristique de cette surface appartient à la surface définie par l'équation*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi + qz - ry) + \frac{\partial f}{\partial y}(\eta + rx - pz) + \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta + py - qx) = \frac{\partial f}{\partial t}.$$

(*) Si $d\rho_2 = 0$, l'équation (12) est vérifiée. Toute surface pouvant être considérée (d'une infinité de manières) comme appartenant à une famille de surfaces à un paramètre, on déduit de là le théorème suivant : *Soient* (S_G), $(S_{G'})$ *les sphères de courbure géodésique des lignes de courbure qui se croisent en un point* M *d'une surface. Pour tout déplacement du point* M *sur cette surface, la caractéristique de* (S_G) [*ou de* $(S_{G'})$] *est orthogonale à* $(S_{G'})$ [*ou à* (S_G)].

*

Les sphères (S_G) et $(S_{G'})$ jouant le même rôle dans la théorie, nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Pour qu'une surface (S) *engendre une famille de Lamé, il suffit que, pour un seul déplacement du point* M, *extérieur à la surface, la caractéristique de* (S_G) [*ou de* $(S_{G'})$] *soit orthogonale à* $(S_{G'})$ [*ou à* (S_G)].

III.

6. Dans une note publiée en 1904 (*), nous avons établi, par la géométrie, une propriété caractéristique des familles de Lamé. Montrons comment on peut la déduire de la relation (11).

Donnons au point M un déplacement $(du, dv, d\rho_2)$; il en résultera pour le trièdre $Mxyz$ un déplacement infiniment petit. Exprimons que la droite GG′ appartient au complexe linéaire (L), lieu des droites invariablement liées au trièdre et qui, dans ce déplacement, sont perpendiculaires aux vitesses de tous leurs points (**). Il suffira d'écrire que la vitesse du point G′, considéré comme invariablement lié au trièdre, est perpendiculaire à la droite GG′.

Les composantes du déplacement du point G′ sont

$$\begin{aligned} &A du + \xi_2 d\rho_2, \\ &C dv + r_{12} d\rho_2 + (r du + r_1 dv + r_2 d\rho_2)G', \\ &\qquad \zeta_2 d\rho_2 - (q du + q_1 dv)G'. \end{aligned}$$

La droite GG′ a pour paramètres directeurs G′, — G, 0.

La condition indiquée se traduit dès lors par l'égalité

$$(13) \qquad (Cr\xi_2 + Ar_1 r_{12} - ACr_2) d\rho_2 = 0.$$

(*) *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, t. CXLVIII, p. 133.

(**) Pour la concision du discours, nous dirons que le complexe (L) est *attaché* au déplacement considéré.

Si la surface (S) engendre une famille de Lamé, la relation (11) a lieu ; par suite, la relation (13) est vérifiée et la droite GG′ appartient au complexe (L).

Supposons à présent que, pour un seul déplacement $(du, dv, d\rho_2)$ du point M, extérieur à la surface, la droite GG′ appartienne au complexe (L). Dans ce cas, la relation (13) sera vérifiée et, comme $d\rho_2$ est $\neq 0$, elle entraînera la relation (11). Par suite, la surface (S) engendrera une famille de Lamé.

Un point étant marqué sur une surface, appelons *droite* g *relative à ce point* la droite qui joint les centres de courbure géodésique des lignes de courbure qui se croisent au point considéré.

Cette dénomination admise, les résultats que nous venons d'établir peuvent être formulés comme il suit :

Si une surface engendre une famille de Lamé, la droite g *relative à un point quelconque* M *de cette surface appartient aux complexes linéaires attachés aux déplacements du trièdre* Mxyz.

Pour qu'une surface engendre une famille de Lamé, il suffit que, pour un seul déplacement du point M, *extérieur à la surface, la droite* g *relative à ce point appartienne au complexe linéaire attaché au déplacement correspondant du trièdre* Mxyz.

7. Appliquons ces théorèmes à la démonstration des propositions de M. Petot concernant les familles de Lamé composées de surfaces égales ou homothétiques.

Supposons qu'une surface (S) engendre une famille de Lamé dans un mouvement hélicoïdal. Soit (H) le complexe linéaire attaché à ce mouvement. Marquons sur (S), prise dans une quelconque de ses positions, un point quelconque M et imprimons à cette surface un déplacement infiniment petit. La droite g relative au point M appartient au complexe (L) attaché au déplacement correspondant du trièdre Mxyz. Or, ce complexe est identique à (H). Donc la droite g relative au point M appartient à (H).

Réciproquement, si les droites g relatives aux différents points d'une surface (S) appartiennent à un complexe linéaire (H), cette surface engendrera une famille de Lamé

dans le mouvement hélicoïdal pour lequel le complexe (H) est le lieu des droites perpendiculaires aux vitesses de tous leurs points.

Imprimons, en effet, à (S), à partir d'une quelconque de ses positions, un déplacement infiniment petit et considérons le déplacement correspondant du trièdre Mxyz, relatif à un point quelconque M, marqué sur (S). Le complexe linéaire (L) attaché à ce déplacement n'est autre que (H). Or, la droite g relative à M appartient à (H), donc elle appartient à (L) et, par suite, la surface (S) engendre une famille de Lamé.

En réunissant ces résultats, on obtient le premier théorème de M. Petot :

Pour qu'une surface engendre une famille de Lamé dans un mouvement hélicoïdal, il faut et il suffit que les droites g *relatives aux différents points de cette surface appartiennent au complexe linéaire attaché au mouvement hélicoïdal considéré.*

8. Supposons qu'une surface (S) qui varie en restant constamment homothétique à une surface (S_0), par rapport à un point fixe O, engendre une famille de Lamé.

Soient M_0 un point quelconque marqué sur (S_0) et M le point homologue de (S), prise dans une quelconque de ses positions. Si (S) varie infiniment peu, le déplacement correspondant du trièdre Mxyz est une translation parallèle à OM_0 et, par suite, le complexe (L) attaché à ce déplacement est composé des droites perpendiculaires à OM_0. Par conséquent, la droite g relative à M est perpendiculaire à OM_0. Or, les surfaces (S_0) et (S) étant homothétiques par rapport au point O, les droites g relatives aux points M_0 et M sont parallèles. Donc la droite g relative au point M_0 est perpendiculaire à OM_0.

Réciproquement, si une surface (S_0) est telle que la droite g relative à un point quelconque M_0 de cette surface soit perpendiculaire à la droite qui joint un point fixe O au point M_0, la surface (S), qui correspond à (S_0) dans une homothétie variable de centre O, engendre une famille de Lamé.

Envisageons, en effet, la surface (S) dans une quelconque de

ses positions et soit, sur cette surface, M le point homologue de M_0. Si (S) varie infiniment peu, le déplacement correspondant du trièdre $Mxyz$ est une translation parallèle à OM_0 et, par suite, le complexe linéaire (L) attaché à ce déplacement est composé des droites perpendiculaires à OM_0.

La droite g relative à M_0 et la droite g relative à M sont parallèles. La première étant perpendiculaire à OM_0, il en est de même de la seconde. Cette dernière appartient donc au complexe (L) et la surface (S) engendre une famille de Lamé. C. Q. F. D.

De ces considérations résulte le deuxième théorème de M. Petot :

Pour que les homothétiques d'une surface (S) *par rapport à un point* O *constituent une famille de Lamé, il faut et il suffit que la droite* g *relative à un point quelconque* M *de* (S) *soit perpendiculaire à* OM.

IV.

9. Soumettons une droite d à une inversion quelconque I. Soient F_1 et F_2 les foyers du cercle (Γ) qui lui correspond. Désignons par I′ une inversion de pôle F_1 et par O le point qui correspond à F_2 dans cette inversion.

Soit (Σ) une sphère orthogonale à d. A cette sphère correspond dans l'inversion I une sphère orthogonale à (Γ) ; celle-ci passe par les foyers de (Γ), donc la surface qui lui correspond dans l'inversion I′ est un plan passant par le point O. Par conséquent :

A toute sphère orthogonale à d, *la transformation* T *qui résulte de la composition des inversions* I *et* I′ *fait correspondre un plan passant par* O.

A tout plan passant par O, *l'inverse* T^{-1} *de la transformation* T *fait correspondre une sphère orthogonale à* d.

10. Nous aurons à invoquer ces propriétés dans la démonstration des deux théorèmes ci-après.

A toute surface (S) *qui engendre une famille de Lamé par rotation autour de* d, *la transformation* T *fait correspondre une surface dont les homothétiques par rapport au point* O *forment une famille de Lamé.*

Soit, en effet, M un point quelconque de (S). En vertu du premier théorème de M. Petot, la droite g relative au point M s'appuie sur d, donc, parmi les sphères passant par le cercle d'intersection des sphères de courbure géodésique des lignes de courbure qui se croisent en M, il y en a une, (Σ), qui est orthogonale à d.

Soumettons la figure à la transformation T. A la surface (S) correspondra une surface (S′) et au point M un point M′. Si l'on observe que les sphères de courbure géodésique des lignes de courbure sont conservées dans l inversion, on reconnaîtra immédiatement qu'à la sphère (Σ) correspondra un plan passant par O et par le cercle d'intersection des sphères de courbure géodésique des lignes de courbure qni se croisent en M′. Par suite, la droite g relative au point M′ sera perpendiculaire à la droite OM′ et, en vertu du deuxième théorème de M. Petot, les homothétiques de la surface (S′), O étant le centre d'homothétie, formeront une famille de Lamé.

A toute surface (S) *dont les homothétiques par rapport au point* O *forment une famille de Lamé, la transformation* T^{-1} *fait correspondre une surface qui engendre une famille de Lamé par rotation autour de* d.

Soit, en effet, M un point quelconque de (S). En vertu du deuxième théorème de M. Petot, la droite g relative au point M est perpendiculaire à OM, donc le plan π du cercle d'intersection des sphères de courbure géodésique des lignes de courbure qui se croisent en M passe par O.

Soumettons la figure à la transformation T^{-1}. A la surface (S) correspondra une surface (S′), au point M un point M′ et au plan π une sphère orthogonale à d et passant par le cercle d'intersection des sphères de courbure géodésique des lignes de courbure qui se croisent en M′. Par suite, la droite g relative au point M′ s'appuiera sur d et, en vertu du premier théorème

de M. Petot, la surface (S') engendrera une famille de Lamé par rotation autour de *d*.

11. Nous allons présenter une application de chacun des théorèmes que nous venons de démontrer.

Si l'on connaît une surface dont les homothétiques par rapport à un point fixe constituent une famille de Lamé, on peut en déduire, par des quadratures, des surfaces qui engendrent des familles de Lamé par translation. Pour l'établir, il suffit de remarquer que les homothétiques d'une surface par rapport à un point fixe ont même représentation sphérique de leurs lignes de courbure et d'appliquer la théorie développée par M. Darboux au n° 240 (p. 435) de ses *Leçons sur les systèmes orthogonaux*.

D'autre part, M. Egorov a montré que lorsqu'on connaît la représentation sphérique d'une surface qui engendre une famille de Lamé par translation, l'intégration d'un système linéaire complet fournit une famille de Lamé composée des homothétiques d'une surface par rapport à un point fixe (*).

Par conséquent :

De toute surface qui engendre une famille de Lamé par rotation, on peut déduire, en effectuant de simples quadratures, une surface qui engendre une famille de Lamé par translation.

De toute surface qui engendre une famille de Lamé par translation, on peut déduire, en intégrant un système linéaire complet, une surface qui engendre une famille de Lamé par rotation.

V.

12. Dans les paragraphes I, II, III, nous avons démontré trois propriétés caractéristiques des familles de Lamé. A notre connaissance, il en existe deux autres : la propriété où inter-

---

(*) Voir G. Darboux, *Leçons sur les systèmes orthogonaux*, p. 439, n° 244.

vient la distance de deux surfaces infiniment voisines (*) et celle qui est due à Ribaucour et à M. Darboux (**). Nous allons les établir au moyen des formules du paragraphe I.

Conservons toutes les notations de ce paragraphe et désignons, en outre, par x, y, z les coordonnées du point M. On sait que x, y, z, $x^2 + y^2 + z^2$ satisfont à l'équation

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\partial v} = \frac{\frac{\partial A}{\partial v}}{A}\frac{\partial\lambda}{\partial u} + \frac{\frac{\partial C}{\partial u}}{C}\frac{\partial\lambda}{\partial v}. \tag{14}$$

Celle-ci s'écrit, en vertu des formules (2) et (3),

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\partial v} = -\frac{Cr}{A}\frac{\partial\lambda}{\partial u} + \frac{Ar_1}{C}\frac{\partial\lambda}{\partial v}.$$

Soit dn la portion de la normale en M comprise entre ce point et la surface de paramètre $\rho_2 + d\rho_2$. Des formules (9) et (10), on déduit

$$dn = \zeta_2 d\rho_2$$

d'où

$$\zeta_2 = \frac{dn}{d\rho_2}.$$

Par conséquent, lorsque M se déplace sur la surface (S), dn varie proportionnellement à ζ_2.

Calculons l'expression

$$\frac{\partial^2\zeta_2}{\partial u\partial v} + \frac{Cr}{A}\frac{\partial\zeta_2}{\partial u} - \frac{Ar_1}{C}\frac{\partial\zeta_2}{\partial v}.$$

(*) G. Darboux, *Leçons sur les systèmes orthogonaux*, p. 75, n° 45.
(**) Id., *ibid.*, p. 76, n° 46.

Si l'on dérive l'équation (5) par rapport à v, il vient, en tenant compte des relations (1), (2), (7) et (6),

$$\frac{\partial^2\zeta_2}{\partial u\partial v} = rp_1\xi_2 + \mathrm{C}rq_2 + qr_1\eta_2 - q\mathrm{C}r_2 - \mathrm{A}p_1r_2 + \mathrm{A}r_1\eta_2.$$

On a, d'autre part,

$$\frac{\mathrm{C}r}{\mathrm{A}}\frac{\partial\zeta_2}{\partial u} - \frac{\mathrm{A}r_1}{\mathrm{C}}\frac{\partial\zeta_2}{\partial v} = -\frac{q\mathrm{C}r}{\mathrm{A}}\xi_2 + \mathrm{C}rq_2 + \mathrm{A}r_1p_2 - \frac{\mathrm{A}p_1}{\mathrm{C}}\eta_2.$$

Par suite,

$$(15)\qquad \frac{\partial^2\zeta_2}{\partial u\partial v} + \frac{\mathrm{C}r}{\mathrm{A}}\frac{\partial\zeta_2}{\partial u} - \frac{\mathrm{A}r_1}{\mathrm{C}}\frac{\partial\zeta_2}{\partial v} = \left(\frac{1}{\mathrm{R}'} - \frac{1}{\mathrm{R}}\right)(\mathrm{C}r\xi_2 + \mathrm{A}r_1\eta_2 - \mathrm{AC}r_2),$$

R et R′ désignant les rayons de courbure principaux de la surface (S) :

$$\mathrm{R} = -\frac{\mathrm{A}}{q},\quad \mathrm{R}' = \frac{\mathrm{C}}{p_1}.$$

Si (S) engendre une famille de Lamé, une au moins des égalités

$$(16)\qquad \frac{1}{\mathrm{R}'} - \frac{1}{\mathrm{R}} = 0,$$

$$(11)\qquad \mathrm{C}r\xi_2 + \mathrm{A}r_1\eta_2 - \mathrm{AC}r_2 = 0$$

est vérifiée. Par conséquent, le premier membre de la relation (15) est nul ; en d'autres termes, ζ_2 satisfait à l'équation (14).

Réciproquement, si ζ_2 satisfait à l'équation (14), une au moins des relations (16) et (11) sera vérifiée et, par suite, (S) engendrera une famille de Lamé.

Donc :

Pour que (S) *engendre une famille de Lamé, il faut et il suffit que* ζ_2 *satisfasse à l'équation* (14).

13. Déterminons les systèmes cycliques normaux à la surface (S).

Tout cercle (Γ) orthogonal en M à cette surface peut être défini par des équations de la forme

$$(17)\qquad \begin{cases} x^2+y^2+z^2-\dfrac{2A}{\theta}x=0,\\ x^2+y^2+z^2-\dfrac{2C}{\theta'}y=0. \end{cases}$$

L'équation

$$(18)\qquad x^2+y^2+z^2-\frac{2}{\sigma}z=0$$

représente une sphère (Σ) tangente en M à la surface (S).

Cherchons à déterminer σ de manière que, lorsque M décrit (S), le second point de contact P de (Σ) avec son enveloppe soit situé sur (Γ). Alors ce point décrira une surface orthogonale aux différentes positions de (Γ).

Les coordonnées du point P satisfont aux équations

$$(19)\qquad \begin{cases} z\dfrac{\partial\sigma}{\partial u}=(A\sigma^2+p\sigma)x,\\ z\dfrac{\partial\sigma}{\partial v}=(C\sigma^2-p_1\sigma)y. \end{cases}$$

Les conditions de compatibilité des équations (17), (18) et (19) sont

$$(20)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\sigma}{\partial u}=\theta\sigma-\dfrac{\theta}{R},\\ \dfrac{\partial\sigma}{\partial v}=\theta'\sigma-\dfrac{\theta'}{R'}, \end{cases}$$

R et R′ désignant, comme plus haut, les rayons de courbure principaux de (S).

En égalant les deux valeurs de $\frac{\partial^2\sigma}{\partial u\partial v}$ qu'on peut déduire des équations (20), on obtient l'égalité

$$\sigma\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}-\frac{\partial\theta'}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\frac{\theta'}{R'}-\frac{\partial}{\partial v}\frac{\theta}{R}+\theta\theta'\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right)=0.$$

Pour qu'il existe deux sphères jouissant de la propriété indiquée, il faut qu'on ait

$$\frac{\partial\theta}{\partial v}=\frac{\partial\theta'}{\partial u}, \tag{21}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\theta'}{R'}-\frac{\partial}{\partial v}\frac{\theta}{R}+\theta\theta'\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right)=0. \tag{22}$$

On démontrera plus bas que si ces conditions sont vérifiées, le système (20) admettra une solution dépendant d'une constante arbitraire; géométriquement, le cercle (Γ) sera orthogonal à une infinité de surfaces et engendrera, par suite, un système cyclique.

On satisfait à l'équation (21) en posant

$$\theta=-\frac{\frac{\partial\lambda}{\partial u}}{\lambda},\qquad \theta'=-\frac{\frac{\partial\lambda}{\partial v}}{\lambda}.$$

Portant ces valeurs de θ et de θ′ dans l'équation (22), il vient

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\partial v}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right)+\frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{R}\right)-\frac{\partial\lambda}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{R'}\right)=0, \tag{23}$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\frac{\partial\lambda}{\partial v}}{R'}\right)=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\frac{\partial\lambda}{\partial u}}{R}\right). \tag{23'}$$

Substituons à σ l'inconnue μ définie par l'égalité

$$\sigma = -\frac{\mu}{\lambda}. \tag{24}$$

Le système (20) deviendra

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \lambda}{\partial u} + \mathrm{R}\frac{\partial \mu}{\partial u} = 0, \\ &\frac{\partial \lambda}{\partial v} + \mathrm{R}'\frac{\partial \mu}{\partial v} = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Si l'on écrit la condition d'intégrabilité pour μ, on obtient l'équation (23′). Donc, à toute solution λ de l'équation (23) correspond une valeur de μ dépendant d'une constante arbitraire et définie par l'égalité

$$\mu = -\int \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial u}}{\mathrm{R}}\,du + \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial v}}{\mathrm{R}'}\,dv. \tag{26}$$

L'équation (24) donne ensuite σ.

On peut dès lors énoncer le théorème suivant :

Le cercle (Γ) *représenté par les équations*

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 + z^2 + 2\frac{\mathrm{A}}{\frac{\partial \log \lambda}{\partial u}}x = 0, \\ &x^2 + y^2 + z^2 + 2\frac{\mathrm{C}}{\frac{\partial \log \lambda}{\partial v}}y = 0, \end{aligned}$$

où λ *désigne une solution quelconque de l'équation* (23), *engendre le système cyclique le plus général normal à la surface* (S) (*).

(*) Lorsque (S) est un plan ou une sphère, l'équation (22) disparaît. Par suite, le cercle (Γ) engendre un système cyclique quelle que soit la fonction λ.

L'équation de l'axe de (Γ), *dans le plan des* xy, *est*

$$\frac{\frac{\partial \log \lambda}{\partial u}}{A} x + \frac{\frac{\partial \log \lambda}{\partial v}}{C} y + 1 = 0. \tag{27}$$

Les surfaces qui coupent orthogonalement les cercles du système cyclique sont les enveloppes des sphères représentées par l'équation (18), σ *étant définie par les équations* (24) *et* (26).

On remarquera qu'en vertu des relations bien connues

$$\frac{\frac{\partial A}{\partial v}}{A} = -\frac{\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{R}}{\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}}, \qquad \frac{\frac{\partial C}{\partial u}}{C} = \frac{\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{R'}}{\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}},$$

les équations (23) et (14) sont identiques.

14. Faisons décrire au point M une trajectoire orthogonale des surfaces (S). L'axe du cercle osculateur de cette ligne est la caractéristique du plan $x\mathrm{M}y$. L'équation de celle-ci est

$$\zeta_2 d\rho_2 + (p_1 dv + p_2 d\rho_2) y - (q du + q_2 d\rho_2) x = 0,$$

ou, en remplaçant *du* et *dv* par leurs valeurs tirées des équations (10) et en tenant compte des relations (8) et (5),

$$\frac{\frac{\partial \log \zeta_2}{\partial u}}{A} x + \frac{\frac{\partial \log \zeta_2}{\partial v}}{C} y + 1 = 0. \tag{28}$$

15. Démontrons à présent les théorèmes de Ribaucour et de M. Darboux.

Si (S) engendre une famille de Lamé, ζ_2 satisfait à l'équation (14) et, comme on passe de l'équation (28) à l'équa-

tion (27) en changeant ζ_2 en λ, *les cercles osculateurs des trajectoires orthogonales des surfaces* (S), *aux points où elles rencontrent une quelconque de ces surfaces, forment un système cyclique.*

Réciproquement, *si cette propriété a lieu,* (S) *engendre une famille de Lamé.*

En effet, l'équation (28) est alors de la forme (27), λ désignant une solution de (14). L'identification des équations (27) et (28) donne

$$\frac{\partial \log \zeta_2}{\partial u} = \frac{\partial \log \lambda}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \log \zeta_2}{\partial v} = \frac{\partial \log \lambda}{\partial v}.$$

On déduit de là que le rapport $\frac{\zeta_2}{\lambda}$ ne dépend que de ρ_2. Or, λ satisfait à l'équation (14); il en est donc de même de ζ_2 et, par suite, (S) engendre une famille de Lamé.

VI.

16. Nous allons établir quelques résultats concernant les surfaces et les familles de Lamé définies au moyen des coordonnées pentasphériques. Nous déduirons ensuite de ces résultats une nouvelle démonstration des théorèmes du n° 5.

Soient $x_1, \ldots, x_5$ les coordonnées pentasphériques d'un point quelconque M d'une surface rapportée au réseau (u, v) de ses lignes de courbure. Ces quantités sont liées par la relation

$$\Sigma x_i^2 = 0 \tag{29}$$

et satisfont à une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = m \frac{\partial \theta}{\partial u} + n \frac{\partial \theta}{\partial v} + p\theta.$$

On a donc

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial u \partial v} = m \frac{\partial x_i}{\partial u} + n \frac{\partial x_i}{\partial v} + p x_i. \qquad (i = 1, ..., 5) \tag{30}$$

Des relations (29) et (30), on déduit

$$\sum \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_i}{\partial v} = 0. \tag{31}$$

Si l'on pose

$$\sum \left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)^2 = \mathrm{E}, \quad \sum \left(\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)^2 = \mathrm{G}, \tag{32}$$

on trouve, en tenant compte des relations (29), (30) et (31),

$$m = \frac{1}{2} \frac{\partial \log \mathrm{E}}{\partial v}, \quad n = \frac{1}{2} \frac{\partial \log \mathrm{G}}{\partial u}. \tag{33}$$

Soient (S_G), $(S_{G'})$ les sphères de courbure géodésique des lignes de courbure $v = \text{const.}$, $u = \text{const.}$ qui se croisent en M. Ces sphères jouissent des propriétés caractéristiques suivantes : 1° la sphère (S_G) [ou $(S_{G'})$] est orthogonale en M à la ligne $u = \text{const.}$ (ou $v = \text{const.}$) ; 2° lorsque u (ou v) varie seul, sa caractéristique est un cercle de rayon nul et de centre M.

Ces propriétés vont nous permettre de déterminer les équations des sphères (S_G) et $(S_{G'})$. Cherchons, par exemple, l'équation de (S_G). Toute sphère (Σ) orthogonale, en M, à la ligne $u = \text{const.}$ a une équation de la forme

$$\sum \left(\frac{\partial x_i}{\partial v} + a x_i\right) \mathrm{X}_i = 0. \tag{34}$$

Lorsque u varie seul, la caractéristique de cette sphère appartient à la sphère (Σ'), définie par l'équation

$$\sum \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial u \partial v} + \frac{\partial a}{\partial u} x_i + a \frac{\partial x_i}{\partial u}\right) \mathrm{X}_i = 0,$$

laquelle peut s'écrire, si l'on tient compte des équations (30 :

$$(35)\qquad \sum\left[(m+a)\frac{\partial x_i}{\partial u}+n\frac{\partial x_i}{\partial v}+\left(p+\frac{\partial a}{\partial u}\right)x_i\right]X_i=0.$$

Pour que la sphère (Σ) coïncide avec (S_c), il faut et il suffit que les sphères (Σ) et (Σ') soient tangentes en M, c'est-à-dire que l'équation (35) soit de la forme (34). De là résulte la relation

$$m+a=0,$$

qui détermine a. En portant la valeur $-m$ de a dans l'équation (34), on obtient l'équation de (S_c) :

$$\sum\left(\frac{\partial x_i}{\partial v}-mx_i\right)X_i=0.$$

On déterminera de même l'équation de $(S_{c'})$:

$$\sum\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}-nx_i\right)X_i=0.$$

17. Considérons une surface variable (S) dépendant d'un paramètre ρ_2. Soit, en coordonnées pentasphériques,

$$x_i=f_i(u,v,\rho_2)\qquad(i=1,\ldots,5)$$

une représentation paramétrique de cette surface, u et v étant les paramètres des lignes de courbure.

Désignons par (C) les lignes de courbure du paramètre u. Si (S) engendre une famille de Lamé, on peut déterminer u en fonction de ρ_2 et d'une constante arbitraire, de manière que, lorsque ρ_2 varie, les courbes (C), qui correspondent aux différentes valeurs de la constante, engendrent des surfaces (Σ) orthogonales à toutes les surfaces (S). Cette condition s'exprime par l'égalité

$$\sum\frac{\partial x_i}{\partial u}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}du+\frac{\partial x_i}{\partial v}dv+\frac{\partial x_i}{\partial\rho_2}d\rho_2\right)=0,$$

de laquelle on déduit, en tenant compte de (31),

$$\frac{du}{d\rho_2} = -\frac{\sum \frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial \rho_2}}{\sum \left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)^2}. \tag{36}$$

Le premier membre de cette égalité ne dépend pas de v; on a donc

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{\sum \frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial \rho_2}}{\sum \left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)^2} = 0. \tag{37}$$

Réciproquement, si la relation (37) est identiquement vérifiée, le second membre de (36) sera une fonction de u et de ρ_2, soit $\varphi(u, \rho_2)$, et cette équation s'écrira

$$\frac{du}{d\rho_2} = \varphi(u, \rho_2).$$

En l'intégrant, on obtiendra pour u une expression de la forme

$$u = \psi(\rho, \rho_2), \tag{38}$$

où ρ désigne une constante arbitraire. Les courbes (C) dont le paramètre u est donné par l'équation (38) engendreront des surfaces orthogonales aux surfaces (S) et dont ρ sera le paramètre. Par suite, en vertu de la réciproque du théorème de Dupin, la surface (S) engendrera une famille de Lamé.

En définitive, pour que (S) engendre une famille de Lamé, il faut et il suffit que la relation (37) soit identiquement vérifiée. Si l'on développe les calculs en tenant compte des relations (29), (30) et (31), elle devient

$$m\sum \frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial \rho_2} - n\sum \frac{\partial x_i}{\partial v}\frac{\partial x_i}{\partial \rho_2} - \sum \frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial^2 x_i}{\partial v \partial \rho_2} = 0. \tag{39}$$

18. Des considérations précédentes, nous allons déduire une nouvelle démonstration de la réciproque du théorème de Dupin.

On vient d'établir que l'identité (39) est la condition nécessaire et suffisante pour que les lignes de courbure de paramètre u engendrent des surfaces orthogonales aux surfaces (S).

De même, pour que les lignes de courbure de paramètre v engendrent des surfaces orthogonales aux surfaces (S), il faut et il suffit que l'on ait l'identité suivante, déduite de (39) en échangeant u et v :

$$(40) \qquad n\sum\frac{\partial x_i}{\partial v}\frac{\partial x_i}{\partial \rho_2} - m\sum\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial \rho_2} - \sum\frac{\partial x_i}{\partial v}\frac{\partial^2 x_i}{\partial u \partial \rho_2} = 0.$$

Si (39) et (40) ont lieu, la surface (S) engendrera évidemment une famille de Lamé.

Or, l'égalité (40) est une conséquence de (39), car si l'on ajoute ces deux égalités, il vient

$$\sum\frac{\partial x_i}{\partial v}\frac{\partial^2 x_i}{\partial u \partial \rho_2} + \sum\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial^2 x_i}{\partial v \partial \rho_2} = 0,$$

identité qu'on déduit de la relation (31) en la dérivant par rapport à ρ_2.

Donc, si (39) a lieu, la surface (S) engendre une famille de Lamé. Comme cette identité a lieu dès que les lignes de courbure de paramètre u engendrent des surfaces orthogonales aux surfaces (S), la réciproque du théorème de Dupin est démontrée.

19. L'interprétation géométrique de la relation (39) va nous fournir une seconde démonstration des théorèmes du n° 5.

M étant un point quelconque de l'espace, envisageons la surface (S) qui passe par ce point, les lignes de courbure de cette surface qui se croisent en M et les sphères de courbure géodésique (S_G), $(S_{G'})$ de ces lignes de courbure.

Donnons au point M un déplacement infiniment petit $(du, dv, d\rho_2)$. La caractéristique (Γ) de la sphère (S_G), relative à ce déplacement, appartient à la sphère (Σ) définie par l'équation

$$\sum d\left(\frac{\partial x_i}{\partial v} - m x_i\right) X_i = 0.$$

Pour que (Γ) soit orthogonale à $(S_{G'})$, il faut et il suffit que la sphère (Σ) soit orthogonale à $(S_{G'})$, c'est-à-dire qu'on ait

$$\sum \left(\frac{\partial x_i}{\partial u} - n x_i\right) d\left(\frac{\partial x_i}{\partial v} - m x_i\right) = 0,$$

ou, en développant les calculs,

$$\sum \frac{\partial x_i}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial u \partial v} du + \frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2} dv + \frac{\partial^2 x_i}{\partial v \partial \rho_2} d\rho_2 - m \frac{\partial x_i}{\partial u} du - m \frac{\partial x_i}{\partial v} dv - m \frac{\partial x_i}{\partial \rho_2} d\rho_2 - x_i dm\right) - n \sum x_i \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial u \partial v} du + \frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2} dv + \frac{\partial^2 x_i}{\partial v \partial \rho_2} d\rho_2 - m dx_i - x_i dm\right) = 0,$$

ou encore, en tenant compte des relations (29) à (33),

$$(41) \quad \sum \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2} dv + \sum \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial^2 x_i}{\partial v \partial \rho_2} d\rho_2 - m \sum \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_i}{\partial \rho_2} d\rho_2 - n \sum x_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2} dv - n \sum x_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial v \partial \rho_2} d\rho_2 = 0.$$

De (29) et (30), on déduit, par dérivation,

$$\sum x_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2} = - \sum \left(\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)^2,$$

$$\sum x_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial v \partial \rho_2} = - \sum \frac{\partial x_i}{\partial v} \frac{\partial x_i}{\partial \rho_2},$$

$$\sum \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2} = - n \sum \left(\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)^2.$$

En vertu de ces égalités, la relation (41) se réduit à la suivante :

$$(42)\quad \left(m\sum\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial \rho_2}-n\sum\frac{\partial x_i}{\partial v}\frac{\partial x_i}{\partial \rho_2}-\sum\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial^2 x_i}{\partial v\partial \rho_2}\right)d\rho_2=0.$$

Si la surface (S) engendre une famille de Lamé, la relation (39) a lieu et, par suite, l'égalité (42) est vérifiée. Donc : *Si une surface* (S) *engendre une famille de Lamé, la caractéristique de la sphère* (S_G), *relative à un déplacement quelconque du point* M, *est orthogonale à la sphère* ($S_{G'}$).

Il est clair qu'en raisonnant sur ($S_{G'}$), on trouverait que sa caractéristique est orthogonale à (S_G).

Démontrons maintenant que *pour qu'une surface* (S) *engendre une famille de Lamé, il suffit que pour un seul déplacement du point* M, *extérieur à la surface, la caractéristique de* (S_G) [*ou de* ($S_{G'}$)] *soit orthogonale à* ($S_{G'}$) [*ou à* (S_G)].

En effet, si, par exemple, la caractéristique de (S_G) est orthogonale à ($S_{G'}$), l'équation (42) sera vérifiée et, comme $d\rho_2$ est $\neq 0$, elle entraînera l'égalité (39), laquelle exprime que (S) engendre une famille de Lamé.

VII.

20. Les propriétés des familles de Lamé que nous avons établies par l'emploi du trièdre M*xyz*, défini au n° 1, peuvent être étendues à la géométrie non euclidienne. Il suffit, à cet effet, de substituer à ce trièdre un tétraèdre autopolaire par rapport à la quadrique fondamentale. Nous avons exposé les principes sur lesquels repose cette méthode dans une note publiée en 1904 (*). Nous nous bornerons ici à cette indication et nous démontrerons par une autre voie que les théorèmes des n^{os} 5 et 15 sont vrais en géométrie non euclidienne.

(*) *Comptes rendus de l'Académe des sciences de Paris*, t. CXXXIX, p. 393.

Les transformations conformes de l'espace euclidien conservent les angles (par définition) et les sphères.

La transformation de M. Darboux (*), qui établit une correspondance entre l'espace euclidien et l'espace non euclidien, conserve aussi les angles et les sphères.

Par conséquent, à toute propriété des transformations conformes, déduite des propriétés qui viennent d'être rappelées, correspond une propriété de la transformation de M. Darboux, susceptible du même énoncé. Par exemple, la transformation de M. Darboux, de même que les transformations conformes, conserve les systèmes triples orthogonaux, les cercles osculateurs d'une courbe, les lignes de courbure d'une surface (**), les sphères de courbure géodésique d'une ligne quelconque tracée sur une surface et, en particulier, les sphères de courbure géodésique des lignes de courbure.

Il suit de là que si une figure euclidienne jouit d'une propriété anallagmatique (c'est-à-dire d'une propriété que les transformations conformes laissent inaltérée), sa transformée non euclidienne jouira de la même propriété.

Les théorèmes des n^os^ 5 et 15 expriment des propriétés anallagmatiques des familles de Lamé. Donc, d'après la remarque précédente, ces propriétés sont vraies aussi en géométrie non euclidienne.

21. Nous allons déduire des théorèmes du n° 5, étendus à la géométrie non euclidienne, une propriété caractéristique des surfaces qui engendrent une famille de Lamé non euclidienne dans un mouvement hélicoïdal non euclidien.

Supposons qu'une surface (S) engendre une famille de Lamé dans un mouvement hélicoïdal. Marquons sur cette surface,

---

(*) G. Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, III^e^ partie, p. 492, n° 846.

(**) Pour le reconnaître, il suffit d'observer qu'en géométrie non euclidienne, comme en géométrie euclidienne, une ligne de courbure est une ligne telle qu'il passe par un point mobile M de cette ligne une sphère tangente en M à la surface et admettant comme caractéristique un cercle de rayon nul et de centre M.

prise dans une quelconque de ses positions, un point quelconque M et désignons par (S_G), $(S_{G'})$ les sphères de courbure géodésique des lignes de courbure qui se croisent en M et par G, G′ les centres de ces sphères. Si (S) subit un déplacement infiniment petit, (S_G), qui conserve sa grandeur, a pour caractéristique un cercle (Γ) dont le plan π passe par G et est perpendiculaire à la vitesse de ce point. Or, (Γ) est orthogonal à $(S_{G'})$, donc π passe par G′ et, par suite, la vitesse de G est perpendiculaire à la droite GG′. Celle-ci appartient dès lors au complexe linéaire attaché au mouvement hélicoïdal considéré.

Réciproquement, si les droites GG′ relatives aux différents points M d'une surface (S) appartiennent à un complexe linéaire (H), cette surface engendrera une famille de Lamé dans le mouvement hélicoïdal pour lequel (H) est le lieu des droites perpendiculaires aux vitesses de tous leurs points.

Imprimons, en effet, à la surface (S), prise dans une quelconque de ses positions, un déplacement infiniment petit. Dans ce déplacement, la vitesse de G est perpendiculaire à GG′; or, le plan π de la caractéristique (Γ) de (S_G) passe par G et est perpendiculaire à la vitesse de ce point; donc il passe par G′, et (Γ) est orthogonal à $(S_{G'})$. Il suit de là que la surface (S) engendre une famille de Lamé.

Le premier théorème de M. Petot est donc étendu à la géométrie non euclidienne.

Il est clair que la démonstration ci-dessus s'applique aussi à la géométrie euclidienne.

NOTE.

Dans son rapport sur le présent mémoire (*), M. Darboux, après avoir signalé les théorèmes établis dans le n° 5, a présenté, au sujet de ces théorèmes, les remarques suivantes :

« La proposition de M. Demoulin peut être rattachée à une notion plus générale.

(*) *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, t. 153, p. 1275.

» Étant donné un complexe (G) de sphères S, c'est-à-dire un ensemble de sphères dépendant de trois paramètres, il y a toujours une sphère S′ orthogonale à chaque sphère S et à toutes les sphères infiniment voisines du complexe (G).

» Les sphères S′, dépendant en général de trois paramètres, forment un second complexe (G′) que nous dirons *conjugué* au premier.

» On reconnaît aisément que la relation entre les deux complexes est réciproque.

» Cela posé, la proposition énoncée par M. Demoulin se ramène à la suivante :

» Pour que la surface (A) engendre une famille de Lamé, il faut et il suffit que les sphères de courbure géodésique associées aux deux systèmes de lignes de courbure, engendrent respectivement deux complexes conjugués. »

Nous allons établir ces différents résultats.

1. Soit, en coordonnées pentasphériques,

$$\Sigma m_i x_i = 0$$

l'équation d'une sphère S qui engendre un complexe (G). Nous supposerons que les coefficients m_i dépendent de trois paramètres ρ_1, ρ_2, ρ_3.

Démontrons qu'il existe une sphère et une seule, S′, orthogonale à S et à toutes les sphères du complexe (G), infiniment voisines de (S).

Soit

$$\Sigma m'_i x_i = 0$$

l'équation d'une telle sphère. Il faut avoir, pour tous les systèmes de valeurs des différentielles $d\rho_1$, $d\rho_2$, $d\rho_3$,

$$\Sigma m'_i (m_i + dm_i) = 0.$$

On déduit de là

$$\Sigma m'_i m_i = 0, \qquad \Sigma m'_i dm_i = 0 \tag{1}$$

ou

$$(2)\qquad \begin{cases} \sum m_i' \, m_i = 0, \\ \sum m_i' \dfrac{\partial m_i}{\partial \rho_1} = 0, \\ \sum m_i' \dfrac{\partial m_i}{\partial \rho_2} = 0, \\ \sum m_i' \dfrac{\partial m_i}{\partial \rho_3} = 0. \end{cases}$$

Ces équations déterminent les rapports mutuels des m_i'. En effet, un au moins des déterminants représentés par la matrice

$$\left\| \begin{matrix} m_1 & \cdots & m_5 \\ \dfrac{\partial m_1}{\partial \rho_1} & \cdots & \dfrac{\partial m_5}{\partial \rho_1} \\ \dfrac{\partial m_1}{\partial \rho_2} & \cdots & \dfrac{\partial m_5}{\partial \rho_2} \\ \dfrac{\partial m_1}{\partial \rho_3} & \cdots & \dfrac{\partial m_5}{\partial \rho_3} \end{matrix} \right\|$$

est $\neq 0$, car si tous ces déterminants étaient nuls, on aurait des relations telles que les suivantes :

$$a_1 \frac{\partial m_i}{\partial \rho_1} + a_2 \frac{\partial m_i}{\partial \rho_2} + a_3 \frac{\partial m_i}{\partial \rho_3} = b m_i, \quad (i = 1, \ldots, 5)$$

a_1, a_2, a_3, b désignant des fonctions de ρ_1, de ρ_2 et de ρ_3. En d'autres termes, les m_i seraient des solutions de l'équation linéaire

$$a_1 \frac{\partial \theta}{\partial \rho_1} + a_2 \frac{\partial \theta}{\partial \rho_2} + a_3 \frac{\partial \theta}{\partial \rho_3} = b\theta.$$

Or, la solution générale de cette équation est de la forme

$$\theta = \varphi F(\chi, \psi),$$

F désignant une fonction arbitraire et φ, χ, ψ des fonctions déterminées. Par suite, en divisant tous les m_i par φ, on pourrait écrire

$$m_i = F_i(\chi, \psi) \quad (i = 1, ..., 5).$$

Les m_i ne dépendraient donc que de deux paramètres au plus, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Faisons une remarque qui sera utilisée plus bas. Les équations (2) expriment que la sphère S′ est orthogonale aux sphères

$$\sum m_i x_i = 0, \quad \sum \frac{\partial m_i}{\partial \rho_1} x_i = 0, \quad \sum \frac{\partial m_i}{\partial \rho_2} x_i = 0, \quad \sum \frac{\partial m_i}{\partial \rho_3} x_i = 0.$$

II. Désignons par (G′) le système des sphères S′. *La sphère* S *est orthogonale aux sphères de* (G′) *infiniment voisines de* S′. S étant orthogonale à S′, il reste à prouver que l'on a

$$\Sigma m_i dm_i' = 0. \tag{3}$$

Or, cette équation s'obtient en différentiant la première équation (1) et en tenant compte de la seconde.

En particulier, *si* (G′) *est un complexe,* (G) *sera conjugué à ce complexe.*

III. *Pour toute variation infiniment petite de la sphère* S, *la caractéristique de cette sphère est orthogonale à* S′.

En effet, la caractéristique de la sphère S appartient à la sphère Σ définie par l'équation

$$\Sigma dm_i . x_i = 0.$$

Pour que cette caractéristique soit orthogonale à S′, il faut et il suffit que Σ soit orthogonale à S′, d'où la condition

$$\Sigma m_i' dm_i = 0.$$

Or, cette égalité est précisément la deuxième relation (1). Le théorème est donc démontré.

On prouvera de même, en se servant de la relation (5), que les caractéristiques de S′ sont orthogonales à S.

IV. Soient

$$\Sigma m_i x_i = 0,$$
$$\Sigma m'_i x_i = 0$$

les équations de deux sphères orthogonales S, S′ dépendant de trois paramètres. Ces sphères engendrent des complexes (G), (G′). *Si, pour toute variation infiniment petite de* S, *la caractéristique de cette sphère est orthogonale à* S′, *les complexes* (G), (G′) *seront conjugués.*

Il s'agit d'établir les relations (1). Les sphères S, S′ étant orthogonales, la première de ces relations est vérifiée. La seconde l'est aussi, car elle exprime la condition énoncée.

V. Des résultats établis dans les nos IV et V, résulte ce théorème :

Pour que deux complexes engendrés par des sphères S, S′ *soient conjugués, il faut et il suffit que pour toute variation infiniment petite de* S, *la caractéristique de cette sphère soit orthogonale à* S′.

VI. Reportons-nous au n° 5. Soient

$$\Sigma m_i x_i = 0,$$
$$\Sigma m'_i x_i = 0$$

les équations des sphères (S_G), $(S_{G'})$. Désignons par (G) le système des sphères (S_G) et par (G′) celui des sphères $(S_{G'})$.

Pour que la surface (S) engendre une famille de Lamé, il faut et il suffit que la caractéristique de (S_G) relative à une variation infiniment petite quelconque de cette sphère soit orthogonale à $(S_{G'})$, c'est-à-dire qu'on ait

$$\Sigma m'_i dm_i = 0.$$

Cette équation exprime que $(S_{G'})$ est orthogonale aux sphères de (G) infiniment voisines de (S_G).

Par suite, les théorèmes du n° 5 sont équivalents au suivant :

Pour que la surface (S) *engendre une famille de Lamé, il faut et il suffit que la sphère* $(S_{G'})$ *soit orthogonale aux sphères de* (G) *infiniment voisines de* (S_G).

Donc, *si* (G) *et* (G') *sont des complexes, pour que* (S) *engendre une famille de Lamé, il faut et il suffit que ces complexes soient conjugués*

VII. Nous allons rattacher à la notion de complexes de sphères conjugués, une transformation que M. Darboux a signalée dans ses *Leçons sur les systèmes orthogonaux* (p. 198, n° 113).

Rapportons à trois axes rectangulaires deux complexes conjugués engendrés par des sphères S et S'. Soient M (x_1, x_2, x_3) le centre de la sphère S et R son rayon ; M' (x'_1, x'_2, x'_3) le centre de la sphère S' et R' son rayon. Nous supposerons que le point M peut occuper toutes les positions dans l'espace.

Si l'on met R^2 sous la forme

$$R^2 = -2U + \Sigma x_i^2 \quad (*), \tag{4}$$

l'équation de la sphère S peut s'écrire

$$f(X_1, X_2, X_3) = \Sigma X_i^2 - 2\Sigma x_i X_i + 2U = 0.$$

D'après une remarque faite au n° I, la sphère S' est orthogonale aux sphères

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0.$$

(*) Faisons observer que 2U est la puissance de l'origine des coordonnées par rapport à la sphère S.

Les trois dernières se réduisant à des plans, le point M′ est à leur intersection. On a donc

$$(5)\qquad \begin{cases} x'_1 = \dfrac{\partial U}{\partial x_1}, \\ x'_2 = \dfrac{\partial U}{\partial x_2}, \\ x'_3 = \dfrac{\partial U}{\partial x_3}. \end{cases}$$

Si les dérivées partielles $\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \frac{\partial U}{\partial x_3}$ ne sont pas liées par une relation ou, ce qui revient au même, si le hessien de U n'est pas nul, le point (x'_1, x'_2, x'_3) peut occuper ∞^3 positions et les équations (5) définissent la transformation à laquelle nous venons de faire allusion.

VIII. Calculons le rayon de la sphère S′. Les sphères S et S′ étant orthogonales, on a

$$(6)\qquad R'^2 + R^2 = \Sigma(x'_i - x_i)^2,$$

d'où, en vertu des relations (4) et (5),

$$R'^2 = \sum\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)^2 - 2\sum \frac{\partial U}{\partial x_i} x_i + 2U.$$

IX. Si l'on pose

$$R'^2 = -2U' + \Sigma x'^2_i,$$

les équations (4) et (6) donnent

$$(7)\qquad U + U' = \Sigma x_i x'_i.$$

Différentions cette relation ; il viendra, en tenant compte des égalités (5),

$$dU' = \Sigma x_i\, dx'_i$$

d'où

$$(8)\qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{\partial U'}{\partial x_1'}, \\ x_2 = \dfrac{\partial U'}{\partial x_2'}, \\ x_3 = \dfrac{\partial U'}{\partial x_3'}. \end{cases}$$

Si l'on tient compte des équations (5) et (8), on peut mettre l'équation (7) sous les deux formes suivantes

$$(9)\qquad U' = \sum \frac{\partial U}{\partial x_i} x_i - U,$$

$$(10)\qquad U = \sum \frac{\partial U'}{\partial x_i'} x_i' - U'.$$

Les équations (5) et (9) [ou les équations (8) et (10)] expriment que les variétés à trois dimensions de l'espace à quatre dimensions décrites par les points (x_1, x_2, x_3, U), (x_1', x_2', x_3', U') se correspondent dans la transformation de Legendre. Ces variétés sont polaires réciproques par rapport à l'hyperquadrique définie, en coordonnées ponctuelles X_1, X_2, X_3, X_4, par l'équation

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 2X_4.$$

X. Une transformation ponctuelle étant donnée, désignons, comme dans le cas des transformations (5), par x_1, x_2, x_3 et x_1', x_2', x_3' les coordonnées rectangulaires de deux points correspondants quelconques M et M'.

Nous allons démontrer que les transformations (5) sont les seules pour lesquelles on a

$$(11)\qquad \sum_i dx_i \delta x_i' = \sum_i \delta x_i dx_i',$$

les signes de différentiation d et δ se rapportant à deux

couples de déplacements des points M et M′ arbitrairement choisis.

Cherchons, en effet, les transformations qui jouissent de cette propriété. Si l'on remplace, dans l'égalité (11), les $\delta x_i'$ et les dx_i' par leurs valeurs

$$\delta x_i' = \sum_k \frac{\partial x_i'}{\partial x_k}\,\delta x_k, \qquad dx_i' = \sum_k \frac{\partial x_i'}{\partial x_k}\,dx_k,$$

il vient

$$\sum_i dx_i \sum_k \frac{\partial x_i'}{\partial x_k}\,\delta x_k = \sum_i \delta x_i \sum_k \frac{\partial x_i'}{\partial x_k}\,dx_k$$

ou

$$\sum_i \sum_k \frac{\partial x_i'}{\partial x_k}\,(dx_i \delta x_k - dx_k \delta x_i) = 0$$

ou encore

$$\left(\frac{\partial x_1'}{\partial x_2} - \frac{\partial x_2'}{\partial x_1}\right)(dx_1\delta x_2 - dx_2\delta x_1) + \left(\frac{\partial x_2'}{\partial x_3} - \frac{\partial x_3'}{\partial x_2}\right)(dx_2\delta x_3 - dx_3\delta x_2)$$
$$+ \left(\frac{\partial x_3'}{\partial x_1} - \frac{\partial x_1'}{\partial x_3}\right)(dx_3\delta x_1 - dx_1\delta x_3) = 0.$$

Pour que cette équation soit vérifiée quels que soient les dx_i et les δx_i, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\partial x_1'}{\partial x_2} = \frac{\partial x_2'}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial x_2'}{\partial x_3} = \frac{\partial x_3'}{\partial x_2}, \qquad \frac{\partial x_3'}{\partial x_1} = \frac{\partial x_1'}{\partial x_3}.$$

Par suite, x_1', x_2', x_3' sont les dérivées partielles d'une fonction U (x_1, x_2, x_3). L'égalité (11) exprime donc bien une propriété caractéristique des transformations (5).

Soient t, t' les droites portant les déplacements des points M, M′, relatifs à la caractéristique d, et τ, τ' les droites

portant les déplacements des mêmes points, relatifs à la caractéristique δ. Il suit de l'égalité (11) que *si les droites* t *et* τ' *sont orthogonales, il en sera de même des droites* t' *et* τ. En particulier, *si* t *et* τ' *se coupent en un point du cercle d'intersection des sphères* S *et* S', t' *et* τ *seront orthogonales.*

SECTION II.

Sur les familles de Lamé composées de surfaces possédant des points singuliers.

1. *Supposons qu'une surface variable* (S) *possédant un point singulier* O *engendre une famille de Lamé. Nous admettrons que le cône tangent en* O *ne renferme pas de plan. Deux cas peuvent se présenter : ou bien ce cône n'est pas de révolution ou bien il est de révolution. Dans le premier cas, le point* O *est fixe; dans le second, ce point est fixe ou mobile; s'il est mobile, la tangente à sa trajectoire coïncide avec l'axe de révolution du cône.*

Ce théorème, qui nous a été suggéré par l'étude de quelques cas particuliers (familles de Lamé composées de cônes ou de cyclides de Dupin), peut être établi comme il suit.

Nous démontrerons d'abord que, sur la surface (S), les lignes de courbure d'un système passent toutes par le point O.

Soit (S′) une surface parallèle à (S). Etablissons entre les surfaces (S) et (S′) la correspondance ponctuelle dans laquelle deux points correspondants sont situés sur une normale commune aux deux surfaces.

Comme le cône tangent en O ne renferme pas de plan, au point O correspond, sur (S′), une courbe (C′) ne possédant pas de point isolé. La courbe (C′) est évidemment une ligne de courbure de (S′); par chacun de ses points, il passe, en général, une ligne de courbure qui lui est orthogonale. Or, sur deux surfaces parallèles, les lignes de courbure se correspondent. Donc, sur la surface (S), les lignes de courbure d'un système passent par le point O. Parmi les lignes de courbure de l'autre système, il y en a une qui se réduit au point O : c'est celle qui correspond à la courbe (C′).

Abordons maintenant la démonstration du théorème et supposons que le point O soit mobile. Comme les lignes de cour-

bure d'un système de la surface (S) passent par le point O, une des deux familles de Lamé qui constituent avec la famille donnée un système triple orthogonal est composée de surfaces (S_1) possédant en commun la trajectoire (Γ) du point O.

Supposons connue cette famille de Lamé. Pour en déduire une surface (S), marquons sur (Γ) un point O et menons par ce point, dans chacune des surfaces (S_1), les lignes de courbure (K_2), (K). Il est clair que le lieu de l'une d'elles, de (K_2) par exemple, est une surface (S).

Construisons enfin la troisième famille du système triple orthogonal. Soit (T) une ligne de courbure de (S), orthogonale aux lignes (K_2). Par le point A où (T) rencontre une quelconque des surfaces (S_1), menons la ligne de courbure de (S_1) qui est orthogonale à la ligne de courbure (K_2) passant par le point A. Le lieu de ces lignes de courbure est évidemment une des surfaces appartenant à la famille de Lamé cherchée. Si, en particulier, on prend pour (T) celle des lignes de courbure de (S) qui se réduit au point O, la surface correspondante, que nous désignerons par (S_2), sera engendrée par les lignes de courbure (K) définies plus haut. Cette surface admet donc le point O comme point conique. Il est clair que si O varie, la surface (S_2) engendrera la famille considérée.

On voit que, des trois familles de Lamé qui composent le système triple orthogonal, deux sont constituées par des surfaces admettant des points coniques situés sur (Γ) et la troisième par des surfaces ayant en commun la courbe (Γ).

Soient ρ, ρ_1, ρ_2 les paramètres des surfaces (S), (S_1), (S_2). Marquons, comme plus haut, sur (Γ) un point O et attachons à chacune des surfaces (S_1) le trièdre trirectangle $Oxyz$ dont les arêtes Ox, Oz sont respectivement tangentes aux courbes (K), (K_2). Ce trièdre dépend de la variable ρ_1; désignons, suivant l'usage, ses rotations par p_1, q_1, r_1; d'après la théorie des systèmes triples orthogonaux, q_1 est nulle (*). Soit φ l'angle que

(*) Voir G. Darboux, *Leçons sur les systèmes orthogonaux*, p. 187, n° 106.

la tangente Ot à la courbe (Γ) fait avec Ox. Relativement au trièdre $Oxyz$, un des points de Ot, situés à la distance un du point O, a pour coordonnées $\cos\varphi$, O, $\sin\varphi$. En exprimant que ce point est fixe, on trouve que φ est constant. Par suite, Ox et Oz engendrent des cônes de révolution autour de Ot. Le cône tangent de la surface (S) est dès lors de révolution autour de Ot et son axe de révolution est la tangente à la trajectoire du point O.

Quelques mots suffisent maintenant pour achever la démonstration du théorème qui fait l'objet de cette section.

Si le cône tangent en O n'est pas de révolution, le point O est fixe, car s'il était mobile, ce cône serait de révolution.

Lorsque le cône tangent est de révolution, son sommet peut être fixe, car tout cône variable de sommet fixe engendre une famille de Lamé.

Enfin, on vient d'établir que si le sommet est mobile, la tangente à sa trajectoire coïncide avec l'axe de révolution du cône.

2. Nous allons exposer rapidement une démonstration analytique du théorème actuel, mais nous nous bornerons au cas où, la surface (S) étant algébrique, le cône tangent en O est du second ordre.

Rapportons la surface (S) au trièdre $Oxyz$ dont les arêtes sont les axes du cône tangent. Les translations ξ, η, ζ et les rotations p, q, r de ce trièdre dépendent, comme (S), d'un paramètre u.

L'équation de (S) est de la forme

$$(1) \qquad 0 = \varphi = ax^2 + by^2 + cz^2 + \cdots.$$

En vertu de l'hypothèse faite sur le cône tangent, abc est $\neq 0$.

En exprimant que la fonction φ satisfait à l'équation (44), page 94 de l'ouvrage cité (la valeur de la quantité φ' qui figure dans cette équation étant celle qui est donnée dans le même

ouvrage, p. 106), on obtient une relation entre x, y, z, u, relation qui doit être vérifiée, soit identiquement, soit en vertu de l'équation (1). On a, dans les deux cas,

$$(2) \qquad \xi(b-c)^2 = 0, \quad \eta(c-a)^2 = 0, \quad \zeta(a-b)^2 = 0.$$

Si le cône tangent n'est pas de révolution, le produit $(a-b)(b-c)(c-a)$ est $\neq 0$. Les relations (2) donnent alors $\xi = \eta = \zeta = 0$. Le point O est donc fixe.

Si le cône tangent est de révolution autour de Oz, on a $a = b \neq c$, et des relations (2) on déduit $\xi = 0$, $\eta = 0$. Si $\zeta = 0$, le point O est fixe ; si ζ n'est pas nulle, la trajectoire du point O est tangente à l'axe de révolution.

SECTION III.

Sur la transformation de Ribaucour.

I.

1. Soient x, y, z les coordonnées d'un point M qui décrit un système triple orthogonal (M) et u_1, u_2, u_3 les paramètres des trois familles de Lamé dont se compose ce système.

L'élément linéaire de l'espace étant défini par la formule

$$ds^2 = H_1^2 du_1^2 + H_2^2 du_2^2 + H_3^2 du_3^2, \tag{1}$$

on sait que x, y, z, $x^2 + y^2 + z^2$ satisfont au système

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u_i \partial u_k} = \frac{\partial \log H_i}{\partial u_k} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial u_i} + \frac{\partial \log H_k}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial u_k}. \tag{2}$$

Soient (S_1), (S_2), (S_3) trois sphères tangentes en M aux surfaces de paramètres u_1, u_2, u_3 qui passent par ce point. Proposons-nous de déterminer le système (M) et les sphères (S_1), (S_2), (S_3) de manière que le second point d'intersection P de ces sphères décrive un système triple orthogonal correspondant au premier et qu'en outre les surfaces de paramètres u_1, u_2, u_3 décrites par le point P soient respectivement tangentes aux sphères (S_1), (S_2), (S_3).

Soient

$$x + \frac{1}{\sigma_i}\frac{\partial x}{\partial u_i}, \quad y + \frac{1}{\sigma_i}\frac{\partial y}{\partial u_i}, \quad z + \frac{1}{\sigma_i}\frac{\partial z}{\partial u_i}$$

les coordonnées du centre O_i de la sphère (S_i) (*). Cette sphère a pour équation

$$S(X-x)^2+\frac{1}{\sigma_i}S(X-x)\frac{\partial x}{\partial u_i}=0.$$

Lorsque u_i est constant, ses points caractéristiques appartiennent à la droite définie par les équations

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}&-S(\dot{X}-x)\frac{\partial x}{\partial u_k}-\frac{1}{\sigma_i^2}\frac{\partial\sigma_i}{\partial u_k}S(X-x)\frac{\partial x}{\partial u_i}\\&+\frac{1}{\sigma_i}S(X-x)\left(\frac{\partial\log H_i}{\partial u_k}\frac{\partial x}{\partial u_i}+\frac{\partial\log H_k}{\partial u_i}\frac{\partial x}{\partial u_k}\right)=0,\\&-S(X-x)\frac{\partial x}{\partial u_l}-\frac{1}{\sigma_i^2}\frac{\partial\sigma_i}{\partial u_l}S(X-x)\frac{\partial x}{\partial u_i}\\&+\frac{1}{\sigma_i}S(X-x)\left(\frac{\partial\log H_i}{\partial u_l}\frac{\partial x}{\partial u_i}+\frac{\partial\log H_l}{\partial u_i}\frac{\partial x}{\partial u_l}\right)=0.\end{aligned}\right.$$

D'après l'énoncé du problème à résoudre, il faut et il suffit que cette droite coïncide avec la droite MA. Les équations de MA sont

$$(4)\quad\frac{1}{\sigma_i}S(X-x)\frac{\partial x}{\partial u_i}=\frac{1}{\sigma_k}S(X-x)\frac{\partial x}{\partial u_k}=\frac{1}{\sigma_l}S(X-x)\frac{\partial x}{\partial u_l}.$$

(*) Les projections du segment MO_i sur les axes coordonnés sont

$$\frac{1}{\sigma_i}\frac{\partial x}{\partial u_i},\ \frac{1}{\sigma_i}\frac{\partial y}{\partial u_i},\ \frac{1}{\sigma_i}\frac{\partial z}{\partial u_i}$$

ou

$$\frac{|H_i|}{\sigma_i}\frac{\frac{\partial x}{\partial u_i}}{|H_i|},\ \frac{|H_i|}{\sigma_i}\frac{\frac{\partial y}{\partial u_i}}{|H_i|},\ \frac{|H_i|}{\sigma_i}\frac{\frac{\partial z}{\partial u_i}}{|H_i|}.$$

Par suite, on obtiendra le point O_i en portant sur la normale à la surface de paramètre u_i, *dans le sens où* u_i *croît*, un segment égal à $\frac{|H_i|}{\sigma_i}$. Cette remarque sera utilisée plus bas.

En identifiant les équations (3) et (4), on trouve

$$(5)\quad \begin{cases} -\sigma_i\sigma_k - \dfrac{\partial\sigma_i}{\partial u_k} + \dfrac{\partial \log H_i}{\partial u_k}\sigma_i + \dfrac{\partial \log H_k}{\partial u_i}\sigma_k = 0, \\ -\sigma_i\sigma_l - \dfrac{\partial\sigma_i}{\partial u_l} + \dfrac{\partial \log H_i}{\partial u_l}\sigma_i + \dfrac{\partial \log H_l}{\partial u_i}\sigma_l = 0, \end{cases}$$

d'où, par permutations circulaires,

$$(6)\quad \begin{cases} -\sigma_k\sigma_l - \dfrac{\partial\sigma_k}{\partial u_l} + \dfrac{\partial \log H_k}{\partial u_l}\sigma_k + \dfrac{\partial \log H_l}{\partial u_k}\sigma_l = 0, \\ -\sigma_k\sigma_i - \dfrac{\partial\sigma_k}{\partial u_i} + \dfrac{\partial \log H_k}{\partial u_i}\sigma_k + \dfrac{\partial \log H_i}{\partial u_k}\sigma_i = 0, \\ -\sigma_l\sigma_i - \dfrac{\partial\sigma_l}{\partial u_i} + \dfrac{\partial \log H_l}{\partial u_i}\sigma_l + \dfrac{\partial \log H_i}{\partial u_l}\sigma_i = 0, \\ -\sigma_l\sigma_k - \dfrac{\partial\sigma_l}{\partial u_k} + \dfrac{\partial \log H_l}{\partial u_k}\sigma_l + \dfrac{\partial \log H_k}{\partial u_l}\sigma_k = 0. \end{cases}$$

Des équations (5) et (6), on déduit

$$\frac{\partial\sigma_i}{\partial u_k} = \frac{\partial\sigma_k}{\partial u_i}$$

Il existe donc une fonction λ telle qu'on ait

$$\sigma_i = \frac{\partial \log \lambda}{\partial u_i}.$$

Si l'on porte dans les équations (5) et (6) ces valeurs des σ_i, ces équations se réduisent aux trois suivantes :

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial u_i \partial u_k} = \frac{\partial \log H_i}{\partial u_k}\frac{\partial\lambda}{\partial u_i} + \frac{\partial \log H_k}{\partial u_i}\frac{\partial\lambda}{\partial u_k}.$$

De là résulte ce théorème, énoncé par Ribaucour (*) :

Étant donné un système triple orthogonal quelconque (M) *décrit par un point* M, *on porte sur la normale à la surface de paramètre* u_i *passant par ce point, dans le sens où* u_i *croît, un segment* MO_i *égal à* $\dfrac{|H_i|}{\dfrac{\partial \log \lambda}{\partial u_i}}$, λ *désignant une solution quelconque du système* (2), *puis on décrit, des points* O_1, O_2, O_3 *comme centres, trois sphères* (S_1), (S_2), (S_3) *passant par le point* M. *Le second point d'intersection* P *de ces sphères décrit un système triple orthogonal* (P) *qui correspond au premier et la surface de paramètre* u_i *passant par le point* P *est tangente à la sphère* (S_i).

Pour la concision du langage, nous dirons que les systèmes (M) et (P) se correspondent dans une transformation de Ribaucour.

Les coordonnées (X, Y, Z) du point P ont pour expressions

$$(7)\qquad \begin{cases} X = x + \theta \sum \dfrac{\dfrac{\partial x}{\partial u_i}\dfrac{\partial \lambda}{\partial u_i}}{H_i^2}, \qquad Y = y + \theta \sum \dfrac{\dfrac{\partial y}{\partial u_i}\dfrac{\partial \lambda}{\partial u_i}}{H_i^2}, \\ Z = z + \theta \sum \dfrac{\dfrac{\partial z}{\partial u_i}\dfrac{\partial \lambda}{\partial u_i}}{H_i^2}, \end{cases}$$

θ étant définie par l'équation

$$(8)\qquad \sum \left(\frac{\dfrac{\partial \lambda}{\partial u_i}}{H_i} \right)^2 + \frac{2\lambda}{\theta} = 0.$$

Les relations (7) et (8) donnent

$$(9)\qquad S(X - x)^2 = -2\lambda\theta.$$

(*) *Bulletin de la Société philomatique de Paris*, 1869.

En différentiant les relations (7), on trouve

$$(10) \qquad \frac{\partial X}{\partial u_i} = \frac{\partial \log \theta}{\partial u_i}\left(X - x + \frac{\dfrac{\partial x}{\partial u_i}}{\dfrac{\partial \log \lambda}{\partial u_i}}\right), \ldots, \ldots .$$

Des relations (10), on déduit la formule donnant l'élément d'arc dS décrit par le point P :

$$dS^2 = \sum H_i^2 \left(\frac{\dfrac{\partial \log \theta}{\partial u_i}}{\dfrac{\partial \log \lambda}{\partial u_i}}\right)^2 du_i^2.$$

2. Tout point Q de la droite MA a des coordonnées ξ, η, ζ de la forme

$$(11) \quad \xi = x + \rho(X - x), \quad \eta = y + \rho(Y - y), \quad \zeta = z + \rho(Z -).$$

Si a, b, c sont les cosinus directeurs de cette droite, on a

$$\xi - x = a.\,MQ, \qquad X - x = a.\,MP$$

d'où, à cause de la première des formules (11),

$$(12) \qquad MQ = \rho.\,MP.$$

Déterminons le point Q de manière qu'on ait

$$(13) \qquad MQ.\,MP = k\lambda,$$

k désignant une constante. Nous allons démontrer que *le point* Q *décrit un système triple orthogonal qui correspond au système* (M) *dans une transformation de Combescure.*

Si l'on tient compte de (12), la relation (13) devient

$$\overline{MP}^2 = \frac{k\lambda}{\rho}.$$

Or, en vertu de (9),

$$\overline{MP}^2 = -2\lambda\theta.$$

Donc

$$\rho = -\frac{k}{2\theta}. \tag{14}$$

Si l'on porte cette valeur de ρ dans les formules (12), on obtient les coordonnées du point Q :

$$\xi = \left(1 + \frac{k}{2\theta}\right)x - \frac{k}{2\theta}X, \ldots, \ldots . \tag{15}$$

On déduit de là, en différentiant et en tenant compte des relations (10),

$$\frac{\partial \xi}{\partial u_i} = \left(1 + \frac{k}{2\theta} - \frac{k}{2\theta^2}\frac{\dfrac{\partial \log \theta}{\partial u_i}}{\dfrac{\partial \log \lambda}{\partial u_i}}\right)\frac{\partial x}{\partial u_i}, \ldots, \ldots .$$

Ces formules mettent en évidence la propriété énoncée.

3. On sait qu'à toute solution λ du système (2), on peut faire correspondre un système triple orthogonal (A) correspondant au système (M) dans une transformation de Combescure. Les coordonnées ξ_0, η_0, ζ_0 du point A qui le décrit sont définies par les équations

$$S(\xi_0 - x)\frac{\partial x}{\partial u_i} = \frac{\partial \lambda}{\partial u_i}. \tag{16}$$

Lorsque $k = -2$, le point Q coïncide avec le point A. En effet, dans ce cas, les équations (15) deviennent

$$\xi - x = \frac{X - x}{\theta}, \ldots, \ldots .$$

Pour justifier notre assertion, il suffit donc de démontrer que l'on a

$$S(X - x)\frac{\partial x}{\partial u_i} = \theta \frac{\partial \lambda}{\partial u_i}.$$

Or, si l'on remplace dans cette égalité les différences $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ par leurs valeurs tirées des formules (7), on obtient une identité.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Étant donné un système triple orthogonal quelconque (M), *considérons le système triple orthogonal* (A) *défini par les équations* (16). *Ce système correspond au système* (M) *dans une transformation de Combescure. Si l'on marque sur* MA *un point* P *tel qu'on ait*

$$MP.\ MA = -2\lambda,$$

le point P *décrira un système triple orthogonal correspondant au système* (M) *dans une transformation de Ribaucour.*

On peut aussi définir le point P en disant qu'il est l'inverse du point A par rapport à la sphère (Σ) de centre M et de rayon égal à $\sqrt{-2\lambda}$.

Comme les plans tangents π_1, π_2, π_3 aux surfaces coordonnées qui passent par A sont parallèles aux plans tangents aux surfaces coordonnées qui passent par M, *les sphères* (S_1), (S_2), (S_3) *sont les inverses des plans* π_1, π_2, π_3 *par rapport à* (Σ).

Lorsque u_i *varie seul, le plan de la caractéristique de* (Σ) *coïncide avec le plan* π_i. En effet, l'équation de (Σ) étant

$$S(X - x)^2 = -2\lambda,$$

la caractéristique de cette sphère est située dans le plan défini par l'équation

$$S(X - x)\frac{\partial x}{\partial u_i} = \frac{\partial \lambda}{\partial u_i}.$$

Or, celle-ci se déduit de l'équation (16) en remplaçant ξ_0, η_0, ζ_0 par x, y, z ; le théorème est donc démontré.

Il suit de là que *si* u_i *est constant, la corde de contact de* (Σ) *avec son enveloppe est la normale en* A *à la surface de paramètre* u_j.

4. Nous allons établir que la droite MA porte deux séries de points décrivant des systèmes triples orthogonaux qui correspondent aux systèmes (M) et (A).

Le système (A) ne change pas lorsqu'on remplace λ par $\lambda + h$, h désignant une constante arbitraire, mais le système (P), qui lui correspond dans l'inversion définie plus haut, varie. Tous les systèmes (P) ainsi obtenus correspondent à (M) dans des transformations de Ribaucour. Il en résulte qu'ils se correspondent deux à deux dans des transformations de Combescure. En effet, appelons trièdre (T) relatif à un point qui décrit un système triple orthogonal le trièdre dont les arêtes sont les normales aux surfaces du système qui passent par le point considéré. Cela posé, le trièdre (T) relatif au point M et le trièdre (T) relatif à un point P sont symétriques par rapport à un plan perpendiculaire à MA. Donc les trièdres (T) relatifs aux points P sont parallèles. C. Q. F. D.

Si, dans les formules (15), k varie, le système (Q) correspondant varie. Tous ces systèmes (Q) correspondent à (M) dans des transformations de Combescure (*). Par suite, les trièdres (T)

(*) Les formules (12) et (14) donnent $MQ = -\frac{k}{2\theta}$. MP, d'où, en faisant $k = -2$, $MA = \frac{1}{\theta}$. MP. De ces égalités, on déduit $MQ = -\frac{k}{2}$. MA. Donc les points Q divisent le segment MA dans des rapports constants. Pour démon-

relatifs à un point P et à un point Q sont symétriques par rapport à un plan perpendiculaire à MA et, dès lors, les systèmes (P) et (Q) qu'ils décrivent se correspondent dans une transformation de Ribaucour.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant, dû à M. Darboux (*) :

Si deux points M_1 *et* M_2 *décrivent des systèmes triples orthogonaux qui se correspondent dans une transformation de Combescure ou dans une transformation de Ribaucour, la droite* M_1M_2 *porte deux séries simplement infinies de points décrivant des systèmes triples orthogonaux qui correspondent aux systèmes* (M_1) *et* (M_2). *Les systèmes décrits par deux points appartenant à une même série se correspondent dans une transformation de Combescure. Les systèmes décrits par deux points appartenant à des séries différentes se correspondent dans une transformation de Ribaucour.*

Chacun des points M_1, M_2 *appartient à une des séries.*

II.

5. Soient (M) et (M′) deux systèmes triples orthogonaux qui se correspondent dans une transformation de Combescure. Conservons pour le système (M) les notations du n° 1. L'élément linéaire de l'espace relatif à ce système est défini par la formule (1) et les coordonnées x, y, z du point M satisfont au système (2). Soit

$$ds'^2 = H_1'^2 du_1^2 + H_2'^2 du_2^2 + H_3'^2 du_3^2$$

---

trer cette propriété, on peut aussi s'appuyer sur le théorème suivant : *Soient* M_1 *et* M_2 *deux points décrivant deux systèmes triples orthogonaux qui se correspondent dans une transformation de Combescure. Pour qu'un point* M, *situé sur la droite* M_1M_2, *décrive un système triple orthogonal qui corresponde aux systèmes* (M_1) *et* (M_2) *dans des transformations de Combescure, il faut et il suffit que le rapport* $\frac{MM_1}{MM_2}$ *soit constant.*

(*) *Leçons sur les systèmes orthogonaux*, 2e édition, nos 214, 215 et 218.

la formule donnant l'élément linéaire de l'espace relatif au système (M'). Les coordonnées x', y', z' du point M' qui décrit (M') satisfont au système

$$\frac{\partial^2\omega'}{\partial u_i \partial u_k} = \frac{\partial \log H_i'}{\partial u_k}\frac{\partial \omega'}{\partial u_i} + \frac{\partial \log H_k'}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial \omega'}{\partial u_k}. \tag{17}$$

Les systèmes (M) et (M') se correspondant dans une transformation de Combescure, on a

$$\frac{\dfrac{\partial x}{\partial u_i}}{H_i} = \frac{\dfrac{\partial x'}{\partial u_i}}{H_i'}, \quad \frac{\dfrac{\partial y}{\partial u_i}}{H_i} = \frac{\dfrac{\partial y'}{\partial u_i}}{H_i}, \quad \frac{\dfrac{\partial z}{\partial u_i}}{H_i} = \frac{\dfrac{\partial z'}{\partial u_i}}{H_i'}. \tag{18}$$

Par suite (x, x'), (y, y'), (z, z') sont trois solutions du système

$$\frac{\dfrac{\partial \omega}{\partial u_i}}{H_i} = \frac{\dfrac{\partial \omega'}{\partial u_i}}{H_i'}.$$

Celui-ci définit soit les trois dérivées de ω, soit les trois dérivées de ω'. Si l'on écrit les conditions d'intégrabilité pour ω', on obtient le système (2) ; si l'on écrit les conditions d'intégrabilité pour ω, on obtient le système (17). Donc, à toute solution ω du système (2) correspond une solution ω' du système (17) donnée par la formule

$$\omega' = \int \frac{H_1'}{H_1}\frac{\partial \omega}{\partial u_1}\,du_1 + \frac{H_2'}{H_2}\frac{\partial \omega}{\partial u_2}\,du_2 + \frac{H_3'}{H_3}\frac{\partial \omega}{\partial u_3}\,du_3$$

et à toute solution ω' du système (17) correspond une solution ω du système (2) définie par l'égalité

$$\omega = \int \frac{H_1}{H_1'}\frac{\partial \omega'}{\partial u_1}\,du_1 + \frac{H_2}{H_2'}\frac{\partial \omega'}{\partial u_2}\,du_2 + \frac{H_3}{H_3'}\frac{\partial \omega'}{\partial u_3}\,du_3.$$

6. Si λ est une solution quelconque du système (2), le point A (ξ, η, ζ) défini par les équations

$$\text{S}(\xi - x)\frac{\partial x}{\partial u_i} = \frac{\partial \lambda}{\partial u_i} \tag{19}$$

décrit un système triple orthogonal (A) qui correspond au système (M) dans une transformation de Combescure.

De même, si λ' est une solution quelconque du système (17), le point A' (ξ', η', ζ') défini par les équations

$$\text{S}(\xi' - x')\frac{\partial x'}{\partial u_i} = \frac{\partial \lambda'}{\partial u_i} \tag{20}$$

décrit un système triple orthogonal (A') qui correspond au système (M') dans une transformation de Combescure.

La solution λ étant arbitrairement choisie, déterminons λ' par les conditions

$$\frac{\dfrac{\partial \lambda'}{\partial u_i}}{\text{H}_i'} = \frac{\dfrac{\partial \lambda}{\partial u_i}}{\text{H}_i}. \tag{21}$$

On déduit de là

$$\lambda' = \int \frac{\text{H}_1'}{\text{H}_1}\frac{\partial \lambda}{\partial u_1}du_1 + \frac{\text{H}_2'}{\text{H}_2}\frac{\partial \lambda}{\partial u_2}du_2 + \frac{\text{H}_3'}{\text{H}_3}\frac{\partial \lambda}{\partial u_3}du_3.$$

En vertu des relations (18) et (21), les équations (20) peuvent s'écrire

$$\text{S}(\xi' - x')\frac{\partial x}{\partial u_i} = \frac{\partial \lambda}{\partial u_i}. \tag{22}$$

Le rapprochement des équations (19) et (22) montre que les segments MA, M'A' sont équipollents.

On a vu (n° 4) que la droite MA porte deux séries de points

décrivant des systèmes triples orthogonaux qui correspondent aux systèmes (M) et (A). Ce sont : 1° les points Q qui divisent le segment MA dans des rapports constants ; 2° les points P définis par l'égalité

$$MP.MA = -2(\lambda + h),$$

h désignant une constante arbitraire.

De même, la droite M'A' porte deux séries de points décrivant des systèmes triples orthogonaux qui correspondent aux systèmes (M') et (A'). Ce sont : 1° les points Q' qui divisent le segment M'A' dans des rapports constants ; 2° les points P' définis par l'égalité

$$M'P'.M'A' = -2(\lambda'_0 + h'),$$

λ'_0 désignant une quelconque des valeurs de λ' et h' une constante arbitraire.

Un système (Q) et un système (Q') se correspondent dans une transformation de Combescure. En effet, les trièdres (T) relatifs à un point Q et à un point Q' sont respectivement parallèles aux trièdres (T) relatifs aux points A et A', lesquels sont parallèles.

Un système (P) et un système (P') se correspondent aussi dans une transformation de Combescure, car les trièdres (T) relatifs à un point P et au point A sont symétriques par rapport à un plan perpendiculaire à MA, et les trièdres (T) relatifs à un point P' et au point A' sont symétriques par rapport à un plan perpendiculaire à M'A'. Or, d'une part, les droites MA et M'A' sont parallèles et, d'autre part, les trièdres (T) relatifs aux points A et A' sont parallèles. Donc, les trièdres (T) relatifs aux points P et P' sont parallèles. C. Q. F. D.

7. Par l'origine O des coordonnées, menons un segment OA'_0 équipollent au segment MA. Le point $A'_0(\xi'_0, \eta'_0, \zeta'_0)$ décrit un système triple orthogonal qui correspond au système (M)

dans une transformation de Combescure. En effet, si l'on remplace, dans les équations (19), les différences $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$ par leurs valeurs ξ'_0, η'_0, ζ'_0, il vient

$$\lambda\xi'_i \frac{\partial x}{\partial u_i} = \frac{\partial \lambda}{\partial u_i}.$$

Désignons par (Q'_0) les homothétiques du système (A'_0) par rapport au point O et par (P'_0) les inverses du même système par rapport au même point.

Un système (Q'_0) et un système (Q) se correspondent dans une transformation de Ribaucour et il en est de même d'un système (P'_0) et d'un système (P).

Pour le démontrer, on raisonnera comme à la fin du n° 6 en ayant égard aux propriétés suivantes : les trièdres (T) relatifs à un point Q'_0 et au point A'_0 sont parallèles; les trièdres (T) relatifs à un point P'_0 et au point A'_0 sont symétriques par rapport à la droite OA'_0.

On peut déduire les systèmes (P'_0) et les systèmes (Q'_0) des systèmes (P') et des systèmes (Q'), par un passage à la limite, en prenant pour (M') un système homothétique au système (M) par rapport au point O, puis en faisant tendre vers zéro le rapport d'homothétie.

La considération de cette figure permet de démontrer que la transformation de Ribaucour ne conduit pas à des systèmes triples orthogonaux différents de ceux que fournissent l'inversion et la transformation de Combescure.

En effet, le système (M) et un système (P) se correspondent dans la transformation de Ribaucour la plus générale. Or, pour passer du système (M) à ce système (P), on peut procéder comme il suit : 1° déduire de (M) le système (A'_0) (transformation de Combescure); 2° déduire de (A'_0) un système (P'_0) (inversion); 3° déduire de (P'_0) le système (P) (transformation de Combescure).

On voit que la transformation de Ribaucour peut être remplacée par une inversion et deux transformations de Combescure.

Cet important résultat et la méthode par laquelle nous venons de l'établir sont dus à M. Darboux (*).

8. Dans le n° 7, nous avons attaché à la figure formée par les systèmes (P) et les systèmes (Q) la figure formée par les systèmes (P'_0) et les systèmes (Q'_0). Démontrons que, réciproquement, étant donnés un système triple orthogonal quelconque (A'_0) et le système triple orthogonal (M) qui lui correspond dans la transformation de Combescure la plus générale, la parallèle à OA'_0, issue du point M, porte une infinité de points Q et une infinité de points P décrivant des systèmes triples orthogonaux qui correspondent, dans des transformations de Combescure, respectivement aux homothétiques et aux inverses du système (A'_0) par rapport au point O.

Par le point M, menons un segment MA équipollent au segment OA'_0. Le point A décrit un système triple orthogonal qui correspond au système (M) dans une transformation de Combescure.

Désignons, en effet, par ξ'_0, η'_0, ζ'_0 les coordonnées du point A'_0, par ξ, η, ζ celles du point A et conservons pour le système (M) les notations du n° 1. Les systèmes (M) et (A'_0) se correspondant dans une transformation de Combescure, il existe une solution λ du système (2) qui satisfait aux équations

$$S\xi'_0 \frac{\partial x}{\partial u_i} = \frac{\partial \lambda}{\partial u_i}.$$

Si l'on remplace, dans ces équations, ξ'_0, η'_0, ζ'_0 par leurs valeurs $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$, on obtient le système (19). Donc (A) et (M) se correspondent dans une transformation de Combescure.

λ est donnée par la formule

$$\lambda = \int S\xi'_0 \frac{\partial x}{\partial u_1} \cdot du_1 + S\xi'_0 \frac{\partial x}{\partial u_2} \cdot du_2 + S\xi'_0 \frac{\partial x}{\partial u_3} \cdot du_3.$$

(*) *Leçons sur les systèmes orthogonaux*, 2e édition, p. 401, n° 218.

Cela posé, les points Q sont ceux qui divisent le segment MA dans des rapports constants. Quant aux points P, ils sont définis par l'égalité

$$\mathrm{MP.MA} = -2(\lambda_0 + h),$$

λ_0 désignant une quelconque des valeurs de λ et h une constante arbitraire.

III.

9. Si deux surfaces se correspondent ponctuellement de manière que deux points correspondants soient les points de contact de ces surfaces avec une sphère et si cette correspondance a lieu avec conservation des lignes de courbure, nous dirons que les deux surfaces se correspondent dans une transformation de Ribaucour.

Si deux surfaces se correspondent ponctuellement de manière que les plans tangents en deux points correspondants soient parallèles et si cette correspondance a lieu avec conservation des lignes de courbure, nous dirons que les deux surfaces se correspondent dans une transformation de Combescure.

Les transformations de Ribaucour et de Combescure jouissent de propriétés toutes semblables à celles qui précèdent. Nous allons les exposer rapidement.

10. Soit (M) une surface rapportée au réseau (u, v) de ses lignes de courbure. Désignons par x, y, z les coordonnées du point M qui la décrit, par c, c', c'' les cosinus directeurs de la normale en M, et par R_1, R_2 les rayons de courbure principaux en ce point.

En vertu des formules d'Olinde Rodrigues, (x, c), (y, c'), (z, c''), $(\mathrm{S}x^2, \mathrm{S}cx)$ sont quatre solutions du système

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} + \mathrm{R}_1 \frac{\partial \mu}{\partial u} = 0,$$
$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} + \mathrm{R}_2 \frac{\partial \mu}{\partial v} = 0.$$

Celui-ci définit soit les dérivées de λ, soit les dérivées de μ. Si l'on écrit la condition d'intégrabilité pour λ, puis la condition d'intégrabilité pour μ, on obtient les deux équations

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(R_1\frac{\partial \mu}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(R_2\frac{\partial \mu}{\partial v}\right), \tag{23}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{R_1}\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{R_2}\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right). \tag{24}$$

La première est l'équation *tangentielle* relative au réseau (u, v), et la seconde, l'équation *ponctuelle* relative au même réseau.

A toute solution μ de l'équation (23) correspond une solution de λ de l'équation (24) donnée par la formule

$$\lambda=-\int R_1\frac{\partial \mu}{du}\,du+R_2\frac{\partial \mu}{\partial v}\,dv,$$

et à toute solution λ de l'équation (24) correspond une solution μ de l'équation (23) définie par l'égalité

$$\mu=-\int \frac{1}{R_1}\frac{\partial \lambda}{\partial u}\,du+\frac{1}{R_2}\frac{\partial \lambda}{\partial v}\,dv.$$

Soient μ une solution quelconque de l'équation (23) et λ la solution correspondante de l'équation (24).

Le point A dont les coordonnées ξ, η, ζ satisfont au système

$$\begin{cases} \mathrm{S}\alpha(\xi-x)=\mu, \\ \mathrm{S}\dfrac{\partial \alpha}{\partial u}(\xi-x)=\dfrac{\partial \mu}{\partial u}, \\ \mathrm{S}\dfrac{\partial \alpha}{\partial v}(\xi-x)=\dfrac{\partial \mu}{\partial v} \end{cases} \tag{25}$$

décrit une surface (A) qui correspond à (M) dans une transformation de Combescure.

Marquons sur MA les points P définis par l'égalité

$$MP.MA = -2(\lambda + h),$$

λ_0 désignant une quelconque des valeurs de λ et h une constante arbitraire.

Chaque point P décrit une surface (P) qui correspond à (M) dans une transformation de Ribaucour. La sphère dont les surfaces (M) et (P) constituent l'enveloppe est l'inverse du plan tangent à la surface (A) par rapport à la sphère de centre M et de rayon égal à $\sqrt{-2(\lambda_0 + h)}$ (*).

Les surfaces (P) se correspondent deux à deux dans des transformations de Combescure.

Les points Q qui divisent le segment MA dans des rapports constants décrivent des surfaces (Q) se correspondant deux à deux dans des transformations de Combescure et correspondant aux surfaces (P) dans des transformations de Ribaucour.

11. Soit (M′) la surface qui correspond à la surface (M) dans la transformation de Combescure la plus générale. Désignons par x', y', z' les coordonnées du point M′ de (M′) qui correspond au point M et par R_1', R_2' les rayons de courbure principaux en ce point. Les cosinus directeurs de la normale en M′ sont évidemment c, c', c''.

(x', c), (y', c'), (z', c''), (Sx'^2, Scx') sont quatre solutions du système

$$\frac{\partial \lambda'}{\partial u} + R_1' \frac{\partial \mu'}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{\partial \lambda'}{\partial v} + R_2' \frac{\partial \mu'}{\partial v} = 0.$$

Celui-ci définit soit les dérivées de λ', soit les dérivées de μ'. Si l'on écrit la condition d'intégrabilité pour λ', puis la condition

---

(*) G. Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, IVe partie, pp. 137 et suivantes.

d'intégrabilité pour μ', on obtient l'équation tangentielle et l'équation ponctuelle relatives au réseau (u, v) :

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(R_1' \frac{\partial \mu'}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(R_2' \frac{\partial \mu'}{\partial v}\right), \tag{26}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{R_1'} \frac{\partial \lambda'}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{R_2'} \frac{\partial \lambda'}{\partial v}\right). \tag{27}$$

Les équations (23) et (26) sont identiques, attendu qu'elles admettent toutes deux les solutions c, c', c''.

La solution μ de l'équation (23) à laquelle correspond la surface (A) étant solution de l'équation (26), le point A′ dont les coordonnées ξ', η', ζ' satisfont au système

$$\left\{\begin{aligned} S c(\xi' - x') &= \mu, \\ S \frac{\partial c}{\partial u}(\xi' - x') &= \frac{\partial \mu}{\partial u}, \\ S \frac{\partial c}{\partial v}(\xi' - x') &= \frac{\partial \mu}{\partial u} \end{aligned}\right. \tag{28}$$

décrit une surface qui correspond à (M′) dans une transformation de Combescure.

Le rapprochement des équations (25) et (28) montre que les segments MA, M′A′ sont équipollents.

A la solution μ de l'équation (26) correspond une solution λ' de l'équation (27) définie par l'égalité

$$\lambda' = -\int R_1' \frac{\partial \mu}{\partial u}\, du + R_2' \frac{\partial \mu}{\partial v}\, dv.$$

Marquons sur la droite M′A′ les points P′ tels qu'on ait

$$M'P'.\ M'A' = -2(\lambda_0' + h'),$$

λ_0' désignant une quelconque des valeurs de λ' et h' une constante arbitraire.

Chaque point P′ décrit une surface (P′) qui correspond à (M′) dans une transformation de Ribaucour. Les surfaces (P′) se correspondent deux à deux dans des transformations de Combescure.

Les points Q′ qui divisent M′A′ dans des rapports constants décrivent des surfaces (Q′) se correspondant deux à deux dans des transformations de Combescure et correspondent aux surfaces (P′) dans des transformations de Ribaucour.

Une surface (P) et une surface (P′) se correspondent dans une transformation de Combescure et il en est de même d'une surface (Q) et d'une surface (Q′).

12. Par l'origine O des coordonnées, menons un segment OA'_0 équipollent à MA. Le point A'_0 $(\xi'_0, \eta'_0, \zeta'_0)$ décrit une surface qui correspond à (M) dans une transformation de Combescure. En effet, si l'on remplace, dans les équations (25), les différences $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$ par leurs valeurs ξ'_0, η'_0, ζ'_0, il vient

$$\mathrm{S}\alpha\xi'_0 = \mu,$$

$$\mathrm{S}\frac{\partial\alpha}{\partial u}\xi'_0 = \frac{\partial\mu}{\partial u},$$

$$\mathrm{S}\frac{\partial\alpha}{\partial v}\xi'_0 = \frac{\partial\mu}{\partial v}.$$

Désignons par (Q'_0) les homothétiques de la surface (A'_0) par rapport au point O et par (P'_0) les inverses de la même surface par rapport au même point.

Une surface (Q'_0) et une surface (Q) se correspondent dans une transformation de Combescure et il en est de même d'une surface (P'_0) et d'une surface (P).

La considération de cette figure permet de démontrer, par un raisonnement tout semblable à celui du n° 7, que la transformation de Ribaucour peut être remplacée par une inversion et deux transformations de Combescure.

On peut déduire les surfaces (P'_0) et les surfaces (Q'_0) des sur-

faces (P′) et des surfaces (Q′), par un passage à la limite, en prenant pour (M′) une surface homothétique de (M) par rapport au point O, puis en faisant tendre vers zéro le rapport d'homothétie.

13. Dans le n° 12, nous avons attaché à la figure formée par les surfaces (P) et les surfaces (Q), la figure formée par les surfaces (P'_0) et les surfaces (Q'_0). Démontrons que, réciproquement, étant données une surface (A'_0) et la surface (M) qui lui correspond dans la transformation de Combescure la plus générale, la parallèle à OA'_0, issue du point M, porte une infinité de points Q et une infinité de points P décrivant des surfaces qui correspondent, dans des transformations de Combescure, respectivement aux homothétiques et aux inverses de la surface (A'_0) par rapport au point O.

Par le point M, menons un segment MA équipollent à OA'_0. Le point A décrit une surface qui correspond à (M) dans une transformation de Combescure.

Désignons, en effet, par ξ'_0, η'_0, ζ'_0 les coordonnées du point A'_0, par ξ, η, ζ celles du point A et conservons pour la surface (M) les notations du n° 10. Les surfaces (A'_0) et (M) se correspondant dans une transformation de Combescure, il existe une solution μ de l'équation (23) qui satisfait aux équations

$$Sc\xi'_0 = \mu,$$

$$S\frac{\partial c}{\partial u}\xi'_0 = \frac{\partial \mu}{\partial u},$$

$$S\frac{\partial c}{\partial v}\xi'_0 = \frac{\partial \mu}{\partial v}.$$

Si l'on remplace, dans ces équations, les quantités ξ'_0, η'_0, ζ'_0 par leurs valeurs $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$, on obtient le système (25). Donc (A) et (M) se correspondent dans une transformation de Combescure.

A la solution μ de l'équation (23) correspond une solution λ de l'équation (24) donnée par la formule

$$\lambda = -\int R_1 S \frac{\partial c}{\partial u} \xi_0' \, du + R_2 S \frac{\partial c}{\partial v} \xi_0' \, dv.$$

Cela posé, les points Q sont ceux qui divisent MA dans des rapports constants. Quant aux points P, ils sont définis par l'égalité

$$MP.MA = -2(\lambda_0 + h),$$

λ_0 désignant une quelconque des valeurs de λ et h une constante arbitraire.

IV.

14. Considérons, dans l'espace à cinq dimensions, un système point (M) à trois indéterminées u_1, u_2, u_3 (*). Les coordonnées θ_h du point M qui le décrit satisfont à un système de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u_i \partial u_k} = a_{ik} \frac{\partial \theta}{\partial u_i} + a_{ki} \frac{\partial \theta}{\partial u_k}. \tag{29}$$

Soit MT_i la tangente à la courbe décrite par le point M lorsque u_i varie seul ; nous supposerons qu'elle n'est pas isotrope ; ses paramètres directeurs sont $\frac{\partial \theta_h}{\partial u_i}$. Faisons correspondre à cette droite la sphère (S_i) de l'espace à trois dimensions définie, en coordonnées pentasphériques, par l'équation

$$\sum_h \frac{\partial \theta_h}{\partial u_i} x_h = 0.$$

(*) Pour tout ce qui concerne ces systèmes, consulter l'ouvrage de M. Guichard : *Sur les systèmes triplement indéterminés et sur les systèmes triple-orthogonaux* (collection *Scientia*, n° 25).

Soient P et Q les points communs aux sphères (S_1), (S_2), (S_3).

On reconnaît aisément que la caractéristique de la sphère (S_i), lorsque u_k varie seul, appartient à la sphère (S_k). Donc, lorsque u_i est constant, la sphère (S_i) touche son enveloppe (E_i) aux points P et Q. Les systèmes triples (P) et (Q) décrits par les points P et Q jouissent, dès lors, de la propriété suivante :

Les surfaces de paramètre u_i *passant par les points* P *et* Q *sont tangentes à la sphère* (S_i).

Par conséquent, lorsque u_i varie seul, les points P et Q décrivent des courbes tangentes au cercle d'intersection des sphères (S_k) et (S_l) et la droite PQ engendre une développable. Il suit de là que les lignes principales de l'enveloppe (E_i) ont pour paramètres u_k, u_l et que les cercles principaux de ladite enveloppe sont les intersections de la sphère (S_i) avec les sphères (S_k) et (S_l). Donc, en vertu d'un théorème dû à Ribaucour (*),

Sur la surface décrite par le centre O_i *de la sphère* (S_i), *lorsque* u_i *est constant, le réseau* (u_k, u_l) *est conjugué et les tangentes aux courbes de paramètres* u_k, u_l *sont respectivement* O_iO_l, O_iO_k.

Si le système (M) est O, les tangentes MT_1, MT_2, MT_3 seront deux à deux orthogonales et il en sera, par suite, de même des sphères (S_1), (S_2), (S_3). Les systèmes (P) et (Q) seront donc orthogonaux et ils se correspondront dans une transformation de Ribaucour. Or, pour que le système (M) soit O, il faut et il suffit que la somme $\Sigma\theta_h^2$ vérifie le système (29). Donc :

Si cinq solutions θ_h *d'un système de la forme* (29) *sont telles que la somme de leurs carrés vérifie ce système, les points d'intersection* P *et* Q *des sphères* (S_i) *définies par les équations*

$$\sum_h \frac{\partial \theta_h}{\partial u_i} x_h = 0$$

(*) Voir G. Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, IIe partie, p. 323, nº 473.

décrivent deux systèmes triples orthogonaux (P) *et* (Q) *qui se correspondent dans une transformation de Ribaucour.*

Cette élégante proposition est due à M. Darboux (*). L'éminent géomètre l'a démontrée sans faire appel à la notion de système point O ; celle-ci, en effet, n'est pas indispensable pour établir le théorème en question, mais elle va nous conduire à de nouvelles propriétés des systèmes triples orthogonaux.

15. Rappelons d'abord comment on déduit du système (M) les systèmes point qui lui sont parallèles.

Soit

$$ds^2 = H_1^2 du_1^2 + H_2^2 du_2^2 + H_3^2 du_3^2$$

la formule donnant l'élément linéaire du système (M). Si l'on désigne par ξ_i^h les cosinus directeurs de la tangente MT_i, on a

$$\frac{\partial \theta_h}{\partial u_i} = H_i \xi_i^h. \tag{30}$$

Soient (M_1) un quelconque des systèmes point parallèles au système (M) et θ_h' les coordonnées du point M_1 qui le décrit. L'élément linéaire de ce système étant défini par la formule

$$ds'^2 = H_1'^2 du_1^2 + H_2'^2 du_2^2 + H_3'^2 du_3^2,$$

on aura

$$\frac{\partial H_k'}{\partial u_i}\frac{1}{H_i'} = \frac{\partial H_k}{\partial u_i}\frac{1}{H_i}, \tag{31}$$

$$\frac{\partial \theta_h'}{\partial u_i} = H_i' \xi_i^h. \tag{32}$$

L'intégration du système (31) fournira les H_i' ; le système (32) donnera ensuite les θ_h'.

(*) *Leçons sur les systèmes orthogonaux*, 2e édition, p. 402, n° 219.

On établit aisément que, dans un espace à un nombre quelconque de dimensions, l'inverse d'un système point O est un système point O. Si donc on soumet le système (M_1) à une inversion dont le pôle soit à l'origine des coordonnées, on obtiendra un nouveau système point O. Les coordonnées du point M′ qui le décrit auront pour valeurs $\frac{\theta'_h}{\theta'_6}$, si l'on pose

$$\theta'_6 = \Sigma\theta'^2_h. \tag{33}$$

L'application du théorème de M. Darboux à ce système fournit le théorème suivant :

Les points d'intersection P′ *et* Q′ *des sphères* (S'_i) *définies par les équations*

$$\sum_h \frac{\partial}{\partial u_4}\frac{\theta'_h}{\theta'_6}x_h = 0$$

décrivent deux systèmes triples orthogonaux (P′) *et* (Q′) *qui se correspondent dans une transformation de Ribaucour.*

Il est clair que la méthode qui nous a permis de passer du couple (P), (Q) au couple (P′), (Q′) peut être poursuivie indéfiniment.

16. Désignons par (Σ) la sphère définie par l'équation

$$\Sigma\theta'_h x_h = 0.$$

Nous allons démontrer que *les sphères* (S_i), (S'_i) *sont inverses par rapport à la sphère* (Σ).

A cet effet, nous établirons d'abord une formule relative à l'inversion. Étant données les coordonnées x_h d'un point P, proposons-nous de calculer les coordonnées x'_h de son inverse P′ par rapport à la sphère (S) définie par l'équation

$$\Sigma m_h X_h = 0.$$

Pour que deux points soient inverses par rapport à une

sphère, il faut et il suffit que ces points soient les foyers d'un cercle appartenant à cette sphère. L'équation générale des sphères passant par le cercle dont P et P′ sont les foyers est

$$\Sigma(x'_h - \lambda x_h)X_h = 0.$$

Parmi ces sphères figure la sphère (S); on peut donc écrire, λ et μ désignant des paramètres convenablement choisis,

$$x'_h = \lambda x_h + \mu m_h. \tag{34}$$

On déduit de là

$$\Sigma x'^2_h = \Sigma(\lambda x_h + \mu m_h)^2$$

ou, en tenant compte des relations $\Sigma x'^2_h = 0$, $\Sigma x^2_h = 0$,

$$0 = 2\lambda\Sigma m_h x_h + \mu\Sigma m^2_h.$$

Par suite, λ et μ n'étant définis qu'à un facteur commun près, il est permis de poser

$$\lambda = -\Sigma m^2_h,$$
$$\mu = 2\Sigma m_h x_h.$$

La formule (34) devient alors

$$x'_h = -x_h\Sigma m^2_h + 2m_h\Sigma m_h x_h$$

ou

$$x'_i = -x_i\Sigma m^2_h + 2m_i\Sigma m_h x_h. \tag{35}$$

Il suit de cette formule que l'inverse de la sphère $\Sigma\mu_h X_h = 0$ par rapport à la sphère (S) a pour équation

$$\Sigma\mu_h X_h\Sigma m^2_h - 2\Sigma m_h X_h\Sigma m_h\mu_h = 0.$$

Par conséquent, l'équation de l'inverse de la sphère (S_i) par rapport à la sphère (Σ) est

$$\sum_h \frac{\partial \theta_h}{\partial u_i} x_h \sum \theta_h'^2 - 2 \sum \theta_h' x_h \sum_h \theta_h' \frac{\partial \theta_h}{\partial u_i} = 0$$

ou, en vertu des relations

$$\frac{\dfrac{\partial \theta_h}{\partial u_i}}{H_i} = \frac{\dfrac{\partial \theta_h'}{\partial u_i}}{H_i'}, \tag{36}$$

déduites des égalités (30) et (32),

$$\sum_h \frac{\partial \theta_h'}{\partial u_i} x_h \sum \theta_h'^2 - 2 \sum \theta_h' x_h \sum_h \theta_h' \frac{\partial \theta_h'}{\partial u_i} = 0,$$

ou encore, à cause de la relation (33),

$$\sum_h \frac{\partial}{\partial u_i} \frac{\theta_h'}{\theta_6'} x_h = 0.$$

Cette équation représentant la sphère (S_i'), le théorème est démontré.

Il résulte de ce théorème que les points P et Q ont pour inverses par rapport à (Σ) les points P′ et Q′. Nous supposerons que P, P′ ; Q, Q′ sont des couples de points inverses. D'après les propriétés de l'inversion, *les systèmes* (P), (P′) *se correspondent dans une transformation de Ribaucour et il en est de même des systèmes* (Q), (Q′) ; *les points* P, P′, Q, Q′ *sont concycliques.*

17. *Les sphères* (S_k), (S_k'), (S_l), (S_l') *ont deux points communs* A_i, B_i *situés sur la sphère* (Σ).

En effet, les sphères (S_k), (S_k') étant inverses par rapport à la sphère (Σ) se coupent suivant un cercle (Γ_k) situé sur cette sphère. De même, les sphères (S_l), (S_l') se coupent suivant un

cercle (Γ_l) situé sur (Σ). Par suite, les sphères (S_k), (S'_k), (S_l), (S'_l) ont en commun les points d'intersection A_i, B_i des cercles (Γ_k) et (Γ_l).

Lorsque u_i est constant, la sphère (Σ) touche son enveloppe aux points A_i et B_i.

En effet, les points de contact de (Σ) avec son enveloppe appartiennent aux sphères définies par les équations

$$\sum \frac{\partial \theta'_h}{\partial u_k} x_h = 0, \qquad \sum \frac{\partial \theta'_h}{\partial u_l} x_h = 0,$$

et, en vertu des égalités (36), ces équations représentent les sphères (S_k) et (S_l).

V.

18. Les considérations qui précèdent s'appliquent aux réseaux O de l'espace à cinq dimensions (*). Soit (M) un tel réseau. Les coordonnées θ_h du point M qui le décrit et la somme de leurs carrés satisfont à une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u_1 \partial u_2} = m \frac{\partial \theta}{\partial u_1} + n \frac{\partial \theta}{\partial u_2}.$$

Le cercle (Γ), intersection des sphères (S_1), (S_2) respectivement définies, en coordonnées pentasphériques, par les équations

$$\sum \frac{\partial \theta_h}{\partial u_1} x_h = 0, \qquad \sum \frac{\partial \theta_h}{\partial u_2} x_h = 0,$$

engendre un système cyclique et admet ces sphères comme sphères focales.

(*) On trouvera la théorie de ces réseaux dans le mémoire bien connu de M. Guichard *Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques* (*Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, années 1897, 1898 et 1903).

En effet, les sphères (S_1), (S_2) sont orthogonales et lorsque u_2 (ou u_1) varie seul, (S_1) [ou (S_2)] a pour caractéristique le cercle (Γ).

Cette correspondance entre les réseaux O de l'espace à cinq dimensions et les systèmes cycliques est due à M. Guichard (*). Elle conduit au théorème suivant qu'on établira en imitant le raisonnement fait par M. Darboux au n° 219 de ses *Leçons sur les systèmes orthogonaux :*

Si une équation de la forme

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_1\partial u_2} = a\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} + b\frac{\partial\varphi}{\partial u_2} + c\varphi$$

admet sept solutions liées par une relation quadratique à coefficients constants, on peut obtenir sans calcul une infinité de systèmes cycliques.

Voici une application de ce théorème. L'intégrale générale de l'équation

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_1\partial u_2} = 0$$

est

$$\varphi = f(u_1) + g(u_2).$$

Par suite, on obtiendra un système cyclique en résolvant l'équation

$$\sum_{k=1}^{k=7}[f_k(u_1) + g_k(u_2)]^2 = 0.$$

Celle-ci appartient à un type classique.

19. Soient (M_1) un réseau parallèle au réseau (M) et θ'_k les coordonnées du point qui le décrit. L'inverse du réseau (M_1) par rapport à l'origine des coordonnées est un réseau O ; les

(*) *Mémoire cité*, 2e partie, chap. VII.

coordonnées du point M′ qui décrit ce réseau sont $\frac{\theta'_h}{\theta'_6}$, si l'on pose $\theta'_6 = \Sigma\theta'^2_h$.

D'après le théorème établi au début du n° 18, *le cercle* (Γ'), *intersection des sphères* (S'_1), (S'_2) *respectivement définies par les équations*

$$\sum \frac{\partial}{\partial u_1}\frac{\theta'_h}{\theta'_6}\cdot x_h = 0, \qquad \sum \frac{\partial}{\partial u_2}\frac{\theta'_h}{\theta'_6}\cdot x_h = 0,$$

engendre un système cyclique et admet ces sphères comme sphères focales.

Les systèmes cycliques lieux des cercles (Γ) et (Γ') ont entre eux les relations suivantes :

Les sphères (S'_1), (S'_2) *sont respectivement les inverses des sphères* (S_1), (S_2) *par rapport à la sphère* (Σ) *définie par l'équation*

$$\Sigma\theta'_h x_h = 0.$$

Par suite, *les cercles* (Γ), (Γ') *sont inverses par rapport à* (Σ). Ils se coupent, dès lors, en deux points situés sur cette sphère. *Ces points sont ceux où* (Σ) *touche son enveloppe.*

SECTION IV.

Sur l'emploi d'une figure de référence mobile formée de cinq sphères deux a deux orthogonales.

On sait tout le parti que l'on peut tirer, en géométrie infinitésimale, de l'emploi d'un trièdre de référence mobile. Certaines questions se traitent plus aisément lorsque, faisant usage des coordonnées pentasphériques, on prend comme figure de référence un système mobile de cinq sphères deux à deux orthogonales. La présente section est consacrée à l'exposé de cette méthode et de quelques-unes de ses applications.

PREMIÈRE PARTIE.

LES MOUVEMENTS A UN PARAMÈTRE.

CHAPITRE PREMIER.

THÉORIE GÉNÉRALE.

I.

1. Nous rappellerons d'abord la définition des coordonnées pentasphériques. L'équation d'une sphère quelconque (Σ) rapportée à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz peut être mise sous la forme

$$2\alpha_1 x + 2\alpha_2 y + 2\alpha_3 z + \alpha_4 \frac{x^2 + y^2 + z^2 - R^2}{R} + i\alpha_5 \frac{x^2 + y^2 + z^2 + R^2}{R} = 0\ (*).$$

(*) G. Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, Ire partie, n° 150.

Les quantités $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ ne sont définies qu'à un facteur commun près; nous les appellerons les coordonnées de la sphère (Σ). Si cette sphère ne se réduit pas à un point, $\Sigma\alpha_k^2$ n'est pas nulle, et il est, par suite, permis de poser

$$\Sigma\alpha_k^2 = 1.$$

Lorsque cette relation sera vérifiée, les coordonnées $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ seront dites *métriques*. Une sphère a donc deux systèmes de coordonnées métriques : si $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ est l'un d'eux, l'autre sera $-\alpha_1, \ldots, -\alpha_5$.

2. Nous appellerons *pentasphère* tout système de cinq sphères deux à deux orthogonales dont les coordonnées métriques sont données en grandeur et en signe.

Considérons un pentasphère quelconque (P_0) et désignons par $(\Sigma_1), \ldots, (\Sigma_5)$ les sphères qui le composent. Soient $\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{i5}$ les coordonnées métriques de la sphère (Σ_i). Les quantités α_{ik} sont les coefficients d'une substitution orthogonale à cinq variables.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque M. Posons

$$(1)\qquad \frac{X_i}{\lambda} = 2\alpha_{i1}x + 2\alpha_{i2}y + 2\alpha_{i3}z + \alpha_{i4}\frac{x^2+y^2+z^2-R^2}{R} + i\alpha_{i5}\frac{x^2+y^2+z^2+R^2}{R},$$

λ désignant un paramètre arbitraire. Les quantités $X_1, \ldots, X_5$ sont les coordonnées pentasphériques du point M rapporté au pentasphère (P_0) (*).

3. Une sphère quelconque (S), rapportée à (P_0), a une équation de la forme

$$(2)\qquad \Sigma m_j X_j = 0.$$

(*) G. Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, Ire partie, n° 152.

Les quantités $m_1, \ldots, m_5$ ne sont définies qu'à un facteur commun près; nous les appellerons les coordonnées de la sphère (S). Si cette sphère ne se réduit pas à un point, Σm_j^2 n'est pas nulle, et il est, par suite, permis de poser

$$\Sigma m_j^2 = 1.$$

Lorsque cette relation sera vérifiée, les coordonnées $m_1, \ldots, m_5$ seront dites *métriques*. Une sphère a donc deux systèmes de coordonnées métriques : si $m_1, \ldots, m_5$ est l'un d'eux, l'autre sera $-m_1, \ldots, -m_5$.

Pour obtenir l'équation de la sphère (S), en coordonnées x, y, z, remplaçons, dans l'équation (2), les coordonnées $X_1, \ldots, X_5$ par leurs valeurs (1), il viendra

$$2\Sigma\alpha_{j1}m_j \cdot x + 2\Sigma\alpha_{j2}m_j \cdot y + 2\Sigma\alpha_{j3}m_j \cdot z$$
$$+ 2\Sigma\alpha_{j4}m_j \cdot \frac{x^2+y^2+z^2-R^2}{R} + 2i\Sigma\alpha_{j5}m_j \cdot \frac{x^2+y^2+z^2+R^2}{R} = 0$$

ou

$$2\bar{\alpha}_1 x + 2\bar{\alpha}_2 y + 2\bar{\alpha}_3 z + \bar{\alpha}_4 \frac{x^2+y^2+z^2-R^2}{R}$$
$$+ i\bar{\alpha}_5 \frac{x^2+y^2+z^2+R^2}{R} = 0,$$

à condition de poser

$$\bar{\alpha}_k = \sum_j \alpha_{jk} m_j. \tag{3}$$

Les équations (3) définissent une substitution orthogonale. On a donc

$$m_k = \sum_j \alpha_{kj}\bar{\alpha}_j, \tag{4}$$

$$\Sigma(\bar{\alpha}_k)^2 = \Sigma m_k^2. \tag{5}$$

De la relation (5), on déduit que si $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_5$ sont des coordonnées métriques de la sphère (S) rapportée au trièdre $Oxyz$, $m_1, \ldots, m_5$ seront des coordonnées métriques de la même sphère rapportée à (P_0) et réciproquement.

4. Considérons à présent un second pentasphère (P) et désignons par $(S_1), \ldots, (S_5)$ les sphères qui le composent. Soient $\bar{\alpha}_{i1}, \ldots, \bar{\alpha}_{i5}$ les coordonnées métriques de la sphère (S_i) rapportée au trièdre $Oxyz$ et $m_{i1}, \ldots, m_{i5}$ les coordonnées métriques de la même sphère rapportée à (P_0). Les quantités $\bar{\alpha}_{ik}$ sont les coefficients d'une substitution orthogonale, et il en est de même des quantités m_{ik}. D'après les relations (3) et (4), il est permis de poser

$$\bar{\alpha}_{ik} = \sum_j \alpha_{jk} m_{ij}, \tag{6}$$

$$m_{ik} = \sum_j \alpha_{kj} \bar{\alpha}_{ij}. \tag{7}$$

Exprimons les coordonnées pentasphériques $x_1, \ldots, x_5$ du point M rapporté à (P) en fonction des coordonnées pentasphériques $X_1, \ldots, X_5$ du même point rapporté à (P_0).

La définition des coordonnées pentasphériques donne, $\bar{\lambda}$ désignant un paramètre arbitraire,

$$\frac{x_i}{\bar{\lambda}} = 2\bar{\alpha}_{i1}x + 2\bar{\alpha}_{i2}y + 2\bar{\alpha}_{i3}z + \bar{\alpha}_{i4}\frac{x^2+y^2+z^2-R^2}{R} + i\bar{\alpha}_{i5}\frac{x^2+y^2+z^2+R^2}{R} \tag{8}$$

ou, en tenant compte des formules (6),

$$\frac{x_i}{\bar{\lambda}} = \sum_j m_{ij}\left(2\alpha_{j1}x + 2\alpha_{j2}y + 2\alpha_{j3}z + \alpha_{j4}\frac{x^2+y^2+z^2-R^2}{R} + i\alpha_{j5}\frac{x^2+y^2+z^2+R^2}{R}\right).$$

Or, en vertu de (1), la quantité entre parenthèses est égale à $\frac{X_j}{\lambda}$. Par suite, si l'on fait $\bar{\lambda} = \lambda$,

$$x_i = \sum_j m_{ij} X_j. \tag{9}$$

Telles sont les formules relatives au changement de sphères coordonnées. Comme elles définissent une substitution orthogonale, on en déduit

$$X_i = \sum_j m_{ji} x_j. \tag{10}$$

5. Soit

$$\sum_j M_j X_j = 0 \tag{11}$$

l'équation d'une sphère quelconque rapportée à (P_0). Formons l'équation de cette sphère rapportée à (P). A cet effet, remplaçons, dans l'équation (11), les coordonnées $X_1, \ldots, X_5$ par leurs valeurs (10), il viendra

$$\sum_j M_j \sum_h m_{hj} x_h = 0$$

ou

$$\sum_h x_h \sum_j m_{hj} M_j = 0$$

ou encore, en échangeant les lettres h et j,

$$\sum_j x_j \sum_h m_{jh} M_h = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$\sum_j m_j x_j = 0,$$

à condition de poser

$$m_j = \sum_h m_{jh} M_h. \tag{12}$$

On déduit de là

$$M_j = \sum_h m_{hj} m_h. \tag{13}$$

6. Dans les nos 2 et 4, nous avons défini analytiquement les coordonnées pentasphériques $X_1, \ldots, X_5$ et $x_1, \ldots, x_5$ du point M rapporté respectivement aux pentasphères (P_0) et (P). Rappelons la définition géométrique de ces quantités (*).

Le second membre de l'égalité (1) est égal à $\frac{\Sigma_i}{R_i}$, Σ_i désignant la puissance du point M par rapport à (Σ_i) et R_i le rayon de cette sphère. R_i est donné par l'égalité

$$\frac{1}{R_i} = \frac{\alpha_{i4} + i\alpha_{i5}}{R}.$$

Lorsque la sphère (Σ_i) se réduit à un plan, le second membre de l'égalité (1) est égal au double de la distance du point M à ce plan.

De même, le second membre de l'égalité (8) est égal à $\frac{S_i}{\overline{R}_i}$, S_i désignant la puissance du point M par rapport à (S_i) et $\overline{R}_i$ le rayon de cette sphère. $\overline{R}_i$ est donné par l'égalité

$$\frac{1}{\overline{R}_i} = \frac{\overline{\alpha}_{i4} + i\overline{\alpha}_{i5}}{R}.$$

Exprimons les $\overline{R}_i$ en fonction des R_i et des coefficients m_{ij}. En vertu des formules (6), l'équation ci-dessus s'écrit

$$\frac{1}{\overline{R}_i} = \sum_j m_{ij} \frac{\alpha_{j4} + i\alpha_{j5}}{R}.$$

(*) G. Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, Ire partie, no 150.

Or

$$\frac{1}{R_j} = \frac{\alpha_{ji} + i\alpha}{R}.$$

Donc

$$\frac{1}{R_i} = \sum_j \frac{m_{ij}}{R_j}. \tag{14}$$

II.

7. Désignons par T une transformation conforme quelconque. Soient, relativement à (P_0), $X_1, \ldots, X_5$ les coordonnées d'un point quelconque M et $X'_1, \ldots, X'_5$ les coordonnées du point M′ qui lui correspond dans cette transformation. $X'_1, \ldots, X'_5$ s'expriment en fonction de $X_1, \ldots, X_5$ au moyen de la substitution orthogonale

$$X'_i = \sum_j \theta_{ij} X_j. \tag{15}$$

Des relations (15), on déduit

$$X_i = \sum_j \theta_{ji} X'_j. \tag{16}$$

L'équation de la sphère (S_i) est

$$\sum_j m_{ij} X_j = 0.$$

Formons l'équation de la sphère (S'_i) qui correspond à (S_i) dans la transformation T. A cet effet, nous exprimerons d'abord $\sum_j m_{ij} X_j$ en fonction de $X'_1, \ldots, X'_5$. On a, en vertu de (16),

$$\sum_j m_{ij} X_j = \sum_j m_{ij} \sum_h \theta_{hj} X'_h = \sum_h X'_h \sum_j \theta_{hj} m_{ij}$$

ou, en échangeant j et h,

$$\sum_j m_{ij} X_j = \sum_j X'_j \sum_h \theta_{jh} m_{ih}$$

ou enfin

$$\sum_j m_{ij} X_j = \sum_j m'_{ij} X'_j, \tag{17}$$

à condition de poser

$$m'_{ij} = \sum_h \theta_{jh} m_{ih}. \tag{18}$$

Dès lors, l'équation de la sphère (S'_i) est

$$\sum_j m'_{ij} X'_j = 0,$$

les coefficients m'_{ij} étant donnés par les relations (18). Celles-ci définissent une substitution orthogonale. Or $\sum_j m_{ij}^2 = 1$, donc $\sum_j m_{ij}'^2 = 1$. Par suite, on peut prendre les quantités $m'_{i1}, \ldots, m'_{i5}$ comme coordonnées métriques de (S'_i). Les coordonnées métriques des sphères $(S'_1), \ldots, (S'_5)$ étant ainsi choisies, désignons par (P') le pentasphère qu'elles déterminent. Nous dirons qu'il correspond au pentasphère (P) dans la transformation T.

8. Soient $x_1, \ldots, x_5$ les coordonnées du point M rapporté à (P) et $x'_1, \ldots, x'_5$ les coordonnées du point M' rapporté à (P'). On a, en vertu des formules (9),

$$x_i = \sum_j m_{ij} X_j,$$

$$x'_i = \sum_j m'_{ij} X'_j.$$

Donc, en tenant compte de (17),

$$x'_i = x_i.$$

9. Du pentasphère (P) nous avons déduit, au moyen de la transformation T, le pentasphère (P'). Montrons maintenant

que, étant donnés deux pentasphères quelconques (P), (P′), il y a une transformation conforme et une seule, en vertu de laquelle (P′) correspond à (P).

Soient (S_1), ..., (S_5) les sphères qui composent (P) et m_{i1}, ..., m_{i5} les coordonnées métriques de (S_i); (S'_1), ..., (S'_5) les sphères qui composent (P′) et m'_{i1}, ..., m'_{i5} les coordonnées métriques de (S'_i). Les quantités m_{ij} sont les coefficients d'une substitution orthogonale, et il en est de même des quantités m'_{ij}.

La transformation conforme dont il faut établir l'existence est définie par des équations de la forme (15), les coefficients θ_{ij} satisfaisant aux équations (18). Pour déterminer ces coefficients, multiplions l'équation (18) par m_{ik} et additionnons les équations obtenues en faisant $i = 1, 2, 3, 4, 5$, il viendra

$$\begin{aligned}\sum_i m'_{ij} m_{ik} &= \sum_i m_{ik} \sum_h \theta_{jh} m_{ih} \\ &= \sum_h \theta_{jh} \sum_i m_{ik} m_{ih} \\ &= \theta_{jk}\end{aligned}$$

ou

$$\theta_{ik} = \sum_j m_{jk} m'_{ji}.$$

On vérifie aisément que les θ_{ik} sont les coefficients d'une substitution orthogonale. Le théorème est donc démontré.

III.

10. Rapportons à un pentasphère fixe (P_f) un pentasphère mobile (P_m) dépendant d'un paramètre u. Désignons par (S_1), ..., (S_5) les sphères qui le composent et soient m_{i1}, ..., m_{i5} les coordonnées métriques de la sphère (S_i). Les quantités m_{ik} sont les coefficients d'une substitution orthogonale à cinq variables, c'est-à-dire, on a

$$(19)\quad \begin{cases} \sum_j m_{ij}^2 = 1, & \sum_j m_{ij} m_{i'j} = 0, \qquad (i, i' = 1,2,3,4,5, i \neq i') \\ \sum_i m_{ij}^2 = 1, & \sum_i m_{ij} m_{ij'} = 0. \qquad (j, j' = 1,2,3,4,5, j \neq j') \end{cases}$$

11. Nous allons former un système de cinq équations différentielles linéaires à cinq inconnues admettant les solutions $(m_{1h}, m_{2h}, m_{3h}, m_{4h}, m_{5h})$ $(h = 1, 2, 3, 4, 5)$.

A cet effet, choisissons, parmi les équations (19), les suivantes :

$$\begin{aligned}
\sum_j m_{ij}^2 &= 1,\\
\sum_j m_{ij} m_{i'j} &= 0,\\
\sum_j m_{ij} m_{i''j} &= 0,\\
\sum_j m_{ij} m_{i'''j} &= 0,\\
\sum_j m_{ij} m_{i''''j} &= 0,
\end{aligned}$$

i, i', i'', i''', i'''' désignant les nombres 1, 2, 3, 4, 5 pris dans un ordre quelconque, et dérivons ces équations par rapport à u; il viendra

$$\begin{aligned}
&\sum_j m_{ij} \frac{dm_{ij}}{du} = 0,\\
&\sum_j m_{i'j} \frac{dm_{ij}}{du} + \sum_j m_{ij} \frac{dm_{i'j}}{du} = 0,\\
&\sum_j m_{i''j} \frac{dm_{ij}}{du} + \sum_j m_{ij} \frac{dm_{i''j}}{du} = 0,\\
&\sum_j m_{i'''j} \frac{dm_{ij}}{du} + \sum_j m_{ij} \frac{dm_{i'''j}}{du} = 0,\\
&\sum m_{i''''j} \frac{dm_{ij}}{du} + \sum_j m_{ij} \frac{dm_{i''''j}}{du} = 0.
\end{aligned}$$

Additionnant ces égalités après les avoir multipliées par m_{ih}, $m_{i'h}$, $m_{i''h}$, $m_{i'''h}$, $m_{i''''h}$, on trouve, en tenant compte des relations (19),

$$(20)\quad \left\{ \begin{aligned}
\frac{dm_{ih}}{du} = &- m_{i'h} \sum_j m_{ij} \frac{dm_{i'j}}{du} - m_{i''h} \sum_j m_{ij} \frac{dm_{i''j}}{du}\\
&- m_{i'''h} \sum_j m_{ij} \frac{dm_{i'''j}}{du} - m_{i''''h} \sum_j m_{ij} \frac{dm_{i''''j}}{du}.
\end{aligned} \right.$$

Posons

$$a_{ik} = \sum_j m_{ij} \frac{dm_{kj}}{du} \tag{21}$$

d'où, en vertu des relations (19),

$$a_{ii} = 0, \qquad a_{ik} + a_{ki} = 0. \tag{22}$$

A cause des formules (21) et de la première relation (22), l'égalité (20) peut s'écrire

$$\frac{dm_{ih}}{du} = -\sum_k a_{ik} m_{kh}. \tag{23}$$

Si l'on fait, dans l'équation (23), $i = 1, 2, 3, 4, 5$, il vient

$$\begin{aligned}
\frac{dm_{1h}}{du} &= \quad - a_{12}m_{2h} - a_{13}m_{3h} - a_{14}m_{4h} - a_{15}m_{5h},\\
\frac{dm_{2h}}{du} &= -a_{21}m_{1h} \quad - a_{23}m_{3h} - a_{24}m_{4h} - a_{25}m_{5h},\\
\frac{dm_{3h}}{du} &= -a_{31}m_{1h} - a_{32}m_{2h} \quad - a_{34}m_{4h} - a_{35}m_{5h},\\
\frac{dm_{4h}}{du} &= -a_{41}m_{1h} - a_{42}m_{2h} - a_{43}m_{3h} \quad - a_{45}m_{5h},\\
\frac{dm_{5h}}{du} &= -a_{51}m_{1h} - a_{52}m_{2h} - a_{53}m_{3h} - a_{54}m_{4h}\ .
\end{aligned}$$

Par suite, $(m_{1h}, m_{2h}, m_{3h}, m_{4h}, m_{5h})$ $(h = 1, 2, 3, 4, 5)$ sont cinq solutions du système

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{dm_1}{du} &= \quad - a_{12}m_2 - a_{13}m_3 - a_{14}m_4 - a_{15}m_5,\\
\frac{dm_2}{du} &= -a_{21}m_1 \quad - a_{23}m_3 - a_{24}m_4 - a_{25}m_5,\\
\frac{dm_3}{du} &= -a_{31}m_1 - a_{32}m_2 \quad - a_{34}m_4 - a_{35}m_5,\\
\frac{dm_4}{du} &= -a_{41}m_1 - a_{42}m_2 - a_{43}m_3 \quad - a_{45}m_5,\\
\frac{dm_5}{du} &= -a_{51}m_1 - a_{52}m_2 - a_{53}m_3 - a_{54}m_4\ .
\end{aligned}\right. \tag{24}$$

Par analogie avec une dénomination adoptée dans la théorie du trièdre mobile, les dix quantités a_{ik} (*) seront appelées les rotations du pentasphère (P_m).

12. Indiquons une interprétation géométrique des rotations.

Supposons que, lorsque u devient $u + du$, les sphères $(S_1), \ldots, (S_5)$ deviennent $(S'_1), \ldots, (S'_5)$. Les coordonnées métriques de la sphère (S'_k) sont $m_{kj} + \frac{dm_{kj}}{du} du + \cdots$ $(j = 1, 2, 3, 4, 5)$.

L'angle (S_i, S'_k) des sphères (S_i), (S'_k) est donné par la formule (**)

$$\cos(S_i, S'_k) = \sum_j m_{ij}\left(m_{kj} + \frac{dm_{kj}}{du} du + \cdots\right).$$

Si i est $\neq k$, celle-ci peut s'écrire, en tenant compte des égalités (19) et (21),

$$\sin\left[\frac{\pi}{2} - (S_i, S'_k)\right] = a_{ik} du + \cdots$$

On déduit de là

$$a_{ik} = \lim_{du=0} \frac{\frac{\pi}{2} - (S_i, S'_k)}{du}.$$

13. Les rotations jouissent d'une propriété très importante que nous allons faire connaître.

Si l'on soumet le pentasphère (P_m) *a une transformation conforme quelconque, les rotations du pentasphère* (P'_m), *qui correspond à* (P_m) *dans cette transformation, seront égales à celles de* (P_m).

(*) Les quantités a_{ik} $(i \neq k)$ sont au nombre de vingt, mais elles se réduisent à dix en vertu d'une des relations (22).

(**) G. Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, Ire partie, nº 156.

Pour établir ce théorème, nous nous appuierons sur les résultats du n° 7. Prenons respectivement pour pentasphères (P_0), (P), (P') les pentasphères (P_f), (P_m), (P'_m) et conservons toutes les notations du dit numéro.

Soient a'_{ik} les rotations de (P'_m). On a, d'après les formules (21),

$$a'_{ik} = \sum_j m'_{ij} \frac{dm'_{kj}}{du}$$

ou, en tenant compte des formules (18),

$$\begin{aligned} a'_{ik} &= \sum_j \left(\sum_h \theta_{jh} m_{ih} \cdot \sum_{h'} \theta_{jh'} \frac{dm_{kh'}}{du} \right) \\ &= \sum_h \sum_{h'} m_{ih} \frac{dm_{kh'}}{du} \sum_j \theta_{jh} \theta_{jh'} \\ &= \sum_h m_{ih} \frac{dm_{kh}}{du}. \end{aligned}$$

Or,

$$a_{ik} = \sum_h m_{ih} \frac{dm_{kh}}{du}.$$

Donc

$$a'_{ik} = a_{ik}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

IV.

14. Dans le n° 11, nous avons attaché à tout pentasphère mobile (P_m), rapporté à un pentasphère fixe (P_f), dix quantités que nous avons appelées ses rotations.

Nous allons à présent démontrer que, étant donnés un pentasphère fixe (P_f) et dix fonctions a_{ik} de u $(a_{ik} + a_{ki} = 0)$, il existe un pentasphère (P_m) et un seul qui, rapporté à (P_f), admet ces fonctions comme rotations et qui, pour $u = u_0$, coïncide avec un pentasphère (P^0_m) arbitrairement choisi.

Soient (S_1^0), ..., (S_5^0) les sphères qui composent (P_m^0) et m_{i1}, ..., m_{i5}^0 les coordonnées métriques de la sphère (S_i^0). Les quantités m_{ij}^0 sont les coefficients d'une substitution orthogonale.

Soient, comme plus haut, (S_1), ..., (S_5) les sphères qui composent (P_m) et m_{i1}, ..., m_{i5} les coordonnées de la sphère (S_i).

Il s'agit d'établir que le système (24) admet un seul système de cinq solutions $(m_{1h}, \ldots, m_{5h})$ $(h = 1, \ldots, 5)$ jouissant des propriétés suivantes :

1° Les quantités m_{ih} satisfont aux relations

$$(25) \qquad \sum_h m_{ih}^2 = 1, \qquad \sum_h m_{ih} m_{i'h} = 0. \qquad (i, i' = 1, \ldots, 5; i \neq i')$$

2° Pour $u = u_0$, m_{ih} est égal à m_{ih}^0 $(i, h = 1, \ldots, 5)$.

Déterminons cinq solutions $(m_{1h}, \ldots, m_{5h})$ du système (24), telles que, pour $u = u_0$, on ait $m_{1h} = m_{1h}^0, \ldots, m_{5h} = m_{5h}^0$.

On démontre aisément que si $(m_1, \ldots, m_5)$, $(m_1', \ldots, m_5')$ sont deux solutions du système (24),

$$\sum m_i^2 = \text{const.},$$
$$\sum m_i m_i' = \text{const.}$$

Par suite,

$$\sum_i m_{ih}^2 = \text{const.}, \qquad \sum_i m_{ih} m_{ih'} = \text{const.} \qquad (h, h' = 1, \ldots, 5; h \neq h')$$

Or, les quantités m_{ij}^0 étant les coefficients d'une substitution orthogonale,

$$\sum_i (m_{ih}^0)^2 = 1, \qquad \sum_i m_{ih}^0 m_{ih'}^0 = 0.$$

Donc

$$\sum_i m_{ih}^2 = 1, \qquad \sum_i m_{ih} m_{ih'} = 0.$$

Ces égalités entraînent, on le sait, les égalités (25). Le théorème est donc démontré.

Tous les mouvements de (P_m) qui correspondent aux choix possibles de (P_m^0) se déduisent de l'un d'eux au moyen des ∞^{10} transformations conformes.

Soient, en effet, (P_m^0), $(P_m'^0)$ deux pentasphères fixes arbitrairement choisis et (P_m), (P_m') les pentasphères qui admettent comme rotations les fonctions données et qui, pour $u = u_0$, coïncident respectivement avec (P_m^0), $(P_m'^0)$. Il existe une transformation conforme T et une seule en vertu de laquelle $(P_m'^0)$ correspond à (P_m^0) (n° 9). Nous allons établir que (P_m') correspond à (P_m) dans cette transformation, ou, ce qui revient au même, que (P_m') coïncide avec le pentasphère (P_m'') qui correspond à (P_m) dans la transformation T. Les pentasphères (P_m''), (P_m') ont mêmes rotations, car il en est ainsi des pentasphères (P_m''), (P_m) (n° 13) et des pentasphères (P_m'), (P_m). D'autre part, ces deux pentasphères coïncident avec $(P_m'^0)$ pour $u = u_0$. Donc, en vertu du théorème ci-dessus, ils coïncident pour toutes les valeurs de u.

V.

15. Reprenons le pentasphère mobile (P_m) considéré au n° 10 et désignons par M un point mobile ou fixe. Soient, à l'*instant* u, $X_1, \ldots, X_5$ les coordonnées du point M rapporté à (P_f) et $x_1, \ldots, x_5$ les coordonnées du même point rapporté à (P_m). $X_1, \ldots, X_5$ seront dites les coordonnées *absolues* du point M et $x_1, \ldots, x_5$, ses coordonnées *relatives*.

Les formules (9) et (10) donnent

$$x_i = \sum_h m_{ih} X_h, \tag{26}$$

$$X_i = \sum_h m_{hi} x_h. \tag{27}$$

A l'instant $u + du$, le point M occupera une position M'. Soient $\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_5$ les coordonnées absolues du point M' et $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_5$ les coordonnées du même point rapporté au pentasphère fixe qui coïncide avec (P_m) à l'instant u.

On a, en vertu de la formule (26),

$$\bar{x}_i = \sum_h m_{ih} \bar{X}_h.$$

Or,

$$\bar{X}_h = X_h + \frac{dX_h}{du} du + \frac{d^2X_h}{du^2} \frac{du^2}{1.2} + \cdots.$$

Donc

$$\bar{x}_i = \sum_h m_{ih} \left(X_h + \frac{dX_h}{du} du + \frac{d^2X_h}{du^2} \frac{du^2}{1.2} + \cdots \right)$$

ou

$$\bar{x}_i = x_i + \sum_h m_{ih} \frac{dX_h}{du} du + \sum_h m_{ih} \frac{d^2X_h}{du^2} \frac{du^2}{1.2} + \cdots.$$

Nous poserons

$$\delta x_i = \sum_h m_{ih} \frac{dX_h}{du} du,$$

$$\delta^2 x_i = \sum_h m_{ih} \frac{d^2X_h}{du^2} du^2,$$

. . . . . .

d'où

$$(28)_1 \qquad \frac{\delta x_i}{du} = \sum_h m_{ih} \frac{dX_h}{du},$$

$$(28)_2 \qquad \frac{\delta^2 x_i}{du^2} = \sum_h m_{ih} \frac{d^2X_h}{du^2},$$

. . . . . .

L'expression de $\bar{x}_i$ deviendra

$$\bar{x}_i = x_i + \delta x_i + \frac{\delta^2 x_i}{1.2} + \cdots$$

ou

$$\bar{x}_i = x_i + \frac{\delta x_i}{du}\,du + \frac{\delta^2 x_i}{du^2}\,\frac{du^2}{1.2} + \cdots .$$

Nous allons exprimer, en fonction des x_i et de leurs dérivées, les quantités

$$\frac{\delta^p x_1}{du^p}, \ldots, \frac{\delta^p x_5}{du^p}. \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

Calculons d'abord $\frac{\delta x_i}{du}$. De la relation (26), on déduit par dérivation

$$\frac{dx_i}{du} = \sum_h \mathrm{X}_h \frac{dm_{ih}}{du} + \sum_h m_{ih} \frac{d\mathrm{X}_h}{du}.$$

Par suite, l'expression $(28)_1$ de $\frac{\delta x_i}{du}$ peut s'écrire

$$\frac{\delta x_i}{du} = -\sum_h \mathrm{X}_h \frac{dm_{ih}}{du} + \frac{dx_i}{du}.$$

Remplaçant $\frac{dm_{ih}}{du}$ par sa valeur (23), il vient

$$\frac{\delta x_i}{du} = \sum_h \mathrm{X}_h \sum_k a_{ik} m_{kh} + \frac{dx_i}{du}$$

ou

$$\frac{\delta x_i}{du} = \sum_k a_{ik} \sum_h m_{kh} \mathrm{X}_h + \frac{dx_i}{du}.$$

Or, la formule (26) donne

$$\sum_h m_{kh} \mathrm{X}_h = x_k.$$

On a donc

$$\frac{\delta x_i}{du} = \sum_k a_{ik} x_k + \frac{dx_i}{du} \qquad (29)$$

ou

$$\delta x_i = \sum_k a_{ik} x_k du + dx_i. \tag{30}$$

Calculons à présent $\frac{\delta^{p+1} x_i}{du^{p+1}}$ ($p \geqq 1$). On a

$$\frac{\delta^p x_i}{du^p} = \sum_h m_{ih} \frac{d^p X_h}{du^p}, \tag{28}_p$$

$$\frac{\delta^{p+1} x_i}{du^{p+1}} = \sum_h m_{ih} \frac{d^{p+1} X_h}{du^{p+1}}. \tag{28}_{p+1}$$

De la relation $(28)_p$, on déduit par dérivation

$$\frac{d}{du} \frac{\delta^p x_i}{du^p} = \sum_h \frac{d^p X_h}{du^p} \frac{dm_{ih}}{du} + \sum_h m_{ih} \frac{d^{p+1} X_h}{du^{p+1}}.$$

Par suite, l'expression $(28)_{p+1}$ de $\frac{\delta^{p+1} x_i}{du^{p+1}}$ peut s'écrire

$$\frac{\delta^{p+1} x_i}{du^{p+1}} = -\sum_h \frac{d^p X_h}{du^p} \frac{dm_{ih}}{du} + \frac{d}{du} \frac{\delta^p x_i}{du^p}.$$

Remplaçant $\frac{dm_{ih}}{du}$ par sa valeur (23), il vient

$$\frac{\delta^{p+1} x_i}{du^{p+1}} = \sum_h \frac{d^p X_h}{du^p} \sum_k a_{ik} m_{kh} + \frac{d}{du} \frac{\delta^p x_i}{du^p}$$

ou

$$\frac{\delta^{p+1} x_i}{du^{p+1}} = \sum_k a_{ik} \sum_h m_{kh} \frac{d^p X_h}{du^p} + \frac{d}{du} \frac{\delta^p x_i}{du^p}.$$

Or, la formule $(28)_p$ donne

$$\sum_h m_{kh} \frac{d^p X_h}{du^p} = \frac{\delta^p x_k}{du^p}.$$

On a donc

$$\frac{\delta^{p+1}x_i}{du^{p+1}} = \sum_k a_{ik}\frac{\delta^p x_k}{du^p} + \frac{d}{du}\frac{\delta^p x_i}{du^p}. \tag{31}$$

Moyennant une convention évidente, cette formule se réduit, pour $p = 0$, à la formule (29).

16. Soient, relativement à un pentasphère fixe, $x_1, \ldots, x_5$ les coordonnées d'un point mobile A. *La sphère définie par l'équation*

$$\Sigma dx_i X_i = 0$$

passe par le point A *et est orthogonale à la trajectoire de ce point.*

Cette sphère passe par le point A, car en différentiant la relation $\Sigma x_i^2 = 0$, on trouve $\Sigma x_i dx_i = 0$.

Pour tout déplacement virtuel du point A à la surface de la sphère, on a, d' étant la caractéristique relative à ce déplacement,

$$\Sigma dx_i d'x_i = 0.$$

Cette égalité exprime l'orthogonalité de la sphère et de la trajectoire du point A.

Le théorème que nous venons de démontrer fournit l'interprétation géométrique suivante des quantités δx_i :

La sphère définie par l'équation

$$\Sigma \delta x_i X_i = 0$$

passe par le point M *et est orthogonale à la trajectoire de ce point.*

En effet, les quantités δx_i sont les différentielles des coordonnées du point M rapporté au pentasphère fixe qui coïncide avec (P_m) à l'instant u.

17. Calculons la différentielle de l'arc de la trajectoire du point M. On sait que si $x_1, \ldots, x_5$ sont les coordonnées

d'un point mobile prises par rapport à un pentasphère fixe, la différentielle de l'arc de sa trajectoire est donnée par la formule (*)

$$ds^2 = \frac{\Sigma\, dx_i^2}{\left(\Sigma \frac{x_i}{R_i}\right)^2}.$$

On a donc, pour la trajectoire du point M,

$$ds^2 = \frac{\Sigma\, \delta x_i^2}{(\Sigma\, a_i x_i)^2} \tag{32}$$

ou

$$ds^2 = \frac{\Sigma \left(\frac{\delta x_i}{du}\right)^2}{(\Sigma\, a_i x_i)^2}\, du^2, \tag{33}$$

a_i désignant l'inverse du rayon de la sphère (S_i). D'après la formule (14), cette quantité a pour expression

$$a_i = \sum_j \frac{m_{ij}}{R_j} \text{ (**)}. \tag{34}$$

18. Si le point M est fixe, on a

$$X_i = \theta Y_i,$$

les Y_i étant des constantes et θ un facteur de proportionnalité. Portant ces valeurs des X_i dans les équations $(28)_1$ et (26), il vient

$$\frac{\delta x_i}{du} = \frac{d\theta}{du} \sum_h m_{ih} Y_i, \qquad x_i = \theta \sum_h m_{ih} Y_i$$

(*) G. Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, Ire partie, n° 152.

(**) Nous désignons par $R_1, \ldots, R_5$ les rayons des sphères qui composent (P_f).

d'où

$$\frac{\delta x_i}{du} = \frac{d \log \theta}{du} x_i.$$

Les $\frac{\delta x_i}{du}$ sont donc proportionnels aux x_i; ils seront nuls si l'on a pris θ constant.

Réciproquement, si les $\frac{\delta x_i}{du}$ sont proportionnels aux x_i, le point M est fixe.

On a, par hypothèse,

$$\frac{\delta x_i}{du} = \omega x_i. \tag{35}$$

Des équations $(28)_1$, on déduit

$$\frac{d\mathrm{X}_i}{du} = \sum_h m_{hi} \frac{\delta x_h}{du}$$

d'où, en vertu des équations (35) et (27),

$$\frac{d\mathrm{X}_i}{du} = \omega \mathrm{X}_i.$$

Par suite, C_i désignant une constante,

$$\mathrm{X}_i = \mathrm{C}_i e^{\int \omega dx}.$$

Les X_i étant proportionnels à des constantes, le point M est fixe.

19. *Soient, relativement à un pentasphère fixe,*

$$f(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3, \mathrm{X}_4, \mathrm{X}_5) = 0$$

l'équation d'une surface et $x_1, \ldots, x_5$ *les coordonnées d'un de ses points.*

Les sphères (Σ) *définies par l'équation*

$$\sum\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}+\lambda x_i\right)X_i=0,$$

dans laquelle λ *désigne un paramètre arbitraire, sont les sphères tangentes à la surface au point* x_1.

D'abord, les sphères (Σ) passent par le point x_i. En effet, $\Sigma\frac{\partial f}{\partial x_i}x_i=0$, la fonction $f(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ étant homogène.

Pour tout déplacement du point x_i sur la surface, on a $\Sigma\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i=0$. Par suite, les sphères (Σ) sont orthogonales à la sphère $\Sigma\, dx_i X_i=0$. Or (n° 16) celle-ci passe par le point x_i et est orthogonale au déplacement dx_i de ce point. Les sphères (Σ) sont donc tangentes à la surface au point x_i.

Il résulte de ce théorème que *les sphères tangentes à la sphère*

$$\Sigma m_i X_i=0$$

au point x_1 *ont pour équation*

$$\Sigma m_i X_i+\lambda\Sigma x_i X_i=0.$$

On peut aussi établir ce résultat en remarquant que cette équation définit un faisceau de sphères parmi lesquelles figure la sphère donnée et la sphère de rayon nul dont le centre est le point x_i.

20. Soit (S) une surface définie relativement au pentasphère mobile (P_m) par l'équation

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, u)=0. \tag{36}$$

Cherchons la caractéristique (Γ) de cette surface. La trajectoire d'un point quelconque x_i de (Γ) étant tangente à la surface (S), on a (n^{os} 16 et 19)

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i = 0$$

ou, en tenant compte de la formule (30),

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(\sum_k a_{ik} x_k + \frac{dx_i}{du} \right) = 0$$

ou encore

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \sum_k a_{ik} x_k + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{du} = 0.$$

Or, l'équation (35) donne par dérivation

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{du} + \frac{\partial f}{\partial u} = 0.$$

Par suite, l'équation précédente peut s'écrire

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \sum_k a_{ik} x_k = \frac{\partial f}{\partial u}.$$

Cette équation définit une surface qui coupe la surface (S) suivant sa caractéristique.

21. Soient $m_1, \ldots, m_5$ les coordonnées d'une sphère (S), variable ou fixe, rapportée à (P_m) et $M_1, \ldots, M_5$ les coordonnées de la même sphère rapportée à (P_f). $M_1, \ldots, M_5$ seront dites les coordonnées *absolues* de (S) et $m_1, \ldots, m_5$, ses coordonnées *relatives*.

Les formules (12) et (13) donnent

$$m_i = \sum_h m_{ih} M_h, \tag{37}$$

$$M_i = \sum_h m_{hi} m_h. \tag{38}$$

A l'instant $u + du$, la sphère (S) deviendra (S'). Soient $\overline{M}_1, \ldots, \overline{M}_5$ les coordonnées absolues de la sphère (S') et $\overline{m}_1, \ldots, \overline{m}_5$ les coordonnées de la même sphère rapportée au pentasphère fixe qui coïncide avec (P_m) à l'instant u.

On a, d'après (37),

$$\overline{m}_i = \Sigma\, m_{ih}\overline{M}_h.$$

Or,

$$\overline{M}_h = M_h + \frac{dM_h}{du}\,du + \frac{d^2M_h}{du^2}\,\frac{du^2}{1.2} + \ldots.$$

Donc

$$\overline{m}_i = \sum_h m_{ih}\left(M_h + \frac{dM_h}{du}\,du + \frac{d^2M_h}{du^2}\,\frac{du^2}{1\ 2} + \ldots\right)$$

ou

$$\overline{m}_i = m_i + \sum_h m_{ih}\,\frac{dM_h}{du}\,du + \sum_h m_{ih}\,\frac{d^2M_h}{du^2}\,\frac{du^2}{1.2} + \ldots.$$

Nous poserons

$$\delta m_i = \sum_h m_{ih}\,\frac{dM_h}{du}\,du,$$

$$\delta^2 m_i = \sum_h m_{ih}\,\frac{d^2M_h}{du^2}\,du^2,$$

. . . . . .

d'où

$$(39)_1 \qquad \frac{\delta m_i}{du} = \sum_h m_{ih}\,\frac{dM_h}{du},$$

$$(39)_2 \qquad \frac{\delta^2 m_i}{du^2} = \sum_h m_{ih}\,\frac{d^2M_h}{du^2},$$

. . . . . .

L'expression de $\overline{m}_i$ deviendra

$$\overline{m}_i = m_i + \delta m_i + \frac{\delta^2 m_i}{1.2} + \cdots$$

ou

$$\overline{m}_i = m_i + \frac{\delta m_i}{du}\,du + \frac{\delta^2 m_i}{du^2}\,\frac{du^2}{1.2} + \cdots .$$

Exprimons, en fonction des m_i et de leurs dérivées, les quantités

$$\frac{\delta^p m_1}{du^p}, \ldots, \frac{\delta^p m_5}{du^p}. \quad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

Les relations $(39)_1$, $(39)_2$, ... et (37) se déduisent des relations $(28)_1$, $(28)_2$, ... et (26) en remplaçant x_i par m_i et X_i par M_i. Or, celles-ci ont conduit aux formules (29) et (31) ; donc celles-là donnent

$$\frac{\delta m_i}{du} = \sum_k a_{ik} m_k + \frac{dm_i}{du}, \tag{40}$$

$$\frac{\delta^{p+1} m_i}{du^{p+1}} = \sum_k a_{ik}\,\frac{\delta^p m_k}{du^p} + \frac{d}{du}\,\frac{\delta^p m_i}{du^p}. \tag{41}$$

Lorsque le rayon de la sphère (S) est nul, ces formules se réduisent aux formules (29) et (31), appliquées au centre de cette sphère. Dans ce cas, en effet, les coordonnées de ce point sont $m_1, \ldots, m_5$.

22. Calculons l'angle $d\varphi$ des sphères (S) et (S').

Si l'on pose

$$\Sigma m_i^2 = 1,$$

on a, en vertu d'une formule connue (*),

$$(42) \qquad d\varphi^2 = \sum_i \left(\frac{\delta m_i}{du}\right)^2 du^2$$

ou, en tenant compte de (40),

$$(43) \qquad d\varphi^2 = \sum_i \left(\sum_k a_{ik} m_k + \frac{dm_i}{du}\right)^2 du^2.$$

Appliquons cette formule au calcul de l'angle $d\varphi_k$ de deux sphères (S_k) infiniment voisines. Dans ce cas, $m_k = 1$, $m_{k'} = 0$ $(k' \neq k)$; donc

$$(44) \qquad d\varphi_k^2 = \sum_i a_{ik}^2 \, du^2.$$

23. Si la sphère (S) est fixe, on a

$$(45) \qquad M_i = \theta N_i,$$

les N_i étant des constantes et θ un facteur de proportionnalité.

En procédant comme au n° 18, on trouve

$$\frac{\delta m_i}{du} = \frac{d \log \theta}{du} m_i.$$

Les $\frac{\delta m_i}{du}$ sont donc proportionnels aux m_i. Ils sont nuls lorsque Σm_i^2 est une constante h différente de zéro. En effet, des relations (45), on déduit $\Sigma M_i^2 = \theta^2 \Sigma N_i^2$. Or, $\Sigma M_i^2 = \Sigma m_i^2 = h$. Donc θ est constant. C. Q. F. D.

Réciproquement, si les $\frac{\delta m_i}{du}$ sont proportionnels aux m_i, la sphère (S) est fixe.

(*) G. Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, Ire partie, n° 156.

Ce théorème se démontre comme le théorème analogue du n° 18.

24. On a vu (n° 11) que le système (24) admet les cinq solutions $(m_{1h}, \ldots, m_{5h})$. *Il admet aussi la solution* $(a_1, \ldots, a_5)$. On a, en effet, (n° 17)

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{m_{11}}{R_1} + \cdots + \frac{m_{15}}{R_5}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_5 &= \frac{m_{51}}{R_1} + \cdots + \frac{m_{55}}{R_5}. \end{aligned}$$

Les R_i étant constants, de ces formules et de la théorie des systèmes d'équations différentielles linéaires résulte le théorème énoncé.

25. Dans certaines questions, au lieu de désigner les rotations d'un pentasphère par la notation a_{ik}, nous poserons

$$(46)\qquad \left\{ \begin{array}{ccccc} & & a_{32} = p, & a_{13} = q, & a_{21} = r, \\ & & a_{14} = \xi, & a_{24} = \eta, & a_{34} = \zeta, \\ a_{15} = \lambda, & a_{25} = \mu, & a_{35} = \nu, & a_{45} = \rho. & \end{array} \right.$$

Le système (24) s'écrira

$$(47)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dm_1}{du} &= rm_2 - qm_3 - \xi m_4 - \lambda m_5, \\ \frac{dm_2}{du} &= pm_3 - rm_1 - \eta m_4 - \mu m_5, \\ \frac{dm_3}{du} &= qm_1 - pm_2 - \zeta m_4 - \nu m_5, \\ \frac{dm_4}{du} &= \xi m_1 + \eta m_2 + \zeta m_3 - \rho m_5, \\ \frac{dm_5}{du} &= \lambda m_1 + \mu m_2 + \nu m_3 + \rho m_4. \end{aligned} \right.$$

Les formules (29) deviendront

$$(48)\quad \begin{cases} \dfrac{\delta x_1}{du} = \lambda x_5 + \xi x_4 + q x_3 - r x_2 + \dfrac{dx_1}{du}, \\ \dfrac{\delta x_2}{du} = \mu x_5 + \eta x_4 + r x_1 - p x_3 + \dfrac{dx_2}{du}, \\ \dfrac{\delta x_3}{du} = \nu x_5 + \zeta x_4 + p x_2 - q x_1 + \dfrac{dx_3}{du}, \\ \dfrac{\delta x}{du} = \rho x_5 - \xi x_1 - \eta x_2 - \zeta x_3 + \dfrac{dx_4}{du}, \\ \dfrac{\delta x_5}{du} = -\rho x_4 - \lambda x_1 - \mu x_2 - \nu x_3 + \dfrac{dx_5}{du}. \end{cases}$$

(A suivre).

ERRATA

Page 2, ligne 11, *au lieu de* $-r\eta_2$, *lire* $q\zeta_2 - r\eta_2$.

Page 2, ligne 15, *au lieu de* $\dfrac{\partial p}{\partial \rho_2}$, *lire* $\dfrac{\partial p_1}{\partial \rho_2}$.

Page 15, ligne 4, *ajouter* en vertu des égalités (5) et (8).

Dans la note de la page 18, *au lieu de* (22), *lire* (23).

Page 22, ligne 8, en remontant, *au lieu de* du *lire* de.

Page 32, ligne 16, *au lieu de* IV et V, *lire* III et IV.

Page 42, dernière ligne, *remplacer les signes* + *par des signes* —.

Page 42, ligne 3, *au lieu de* $\dfrac{1}{\sigma_i}$, *lire* $\dfrac{2}{\sigma_i}$.

Page 43, lignes 11 et 12, *au lieu de* MA, *lire* MP.

Dans la note de la page 43, *faire précéder du signe* — *les expressions qui figurent aux lignes* 2, 4 et 6.

Page 45, *faire précéder du signe* — *l'expression qui figure à la ligne* 5.

Page 46, ligne 6, *au lieu de* MA, *lire* MP.

Page 58, ligne 2, *au lieu de* λ, *lire* λ_0.

Page 59, ligne 12, *au lieu de* $\dfrac{\partial \mu}{\partial u}$, *lire* $\dfrac{\partial \mu}{\partial v}$.

Page 77, ligne 2, *au lieu de* α, *lire* α_{j5}.

Page 96, ligne 6, *au lieu de* $m_k = 0$, *lire* $m_{k'} = 0$.

ESSAIS

ARITHMÉTIQUES

PAR

Édouard SCHMIDT

INGÉNIEUR HONORAIRE DES MINES

AVANT-PROPOS

Ce mémoire a été présenté à la Société royale des Sciences de Liége dans sa séance du mois de février 1912. Il s'occupe des suites récurrentes, et procède d'une propriété des déterminants récurrents qui nous semble fondamentale. Le lecteur la trouvera au n° 14. Cette propriété était connue depuis longtemps — déjà Spottiswood la cite (*) — pour les circulants, que l'on peut considérer comme les déterminants récurrents les plus simples ; mais, à notre connaissance du moins, on n'a jamais songé à la généraliser pour les déterminants récurrents quelconques.

En considérant les déterminants récurrents suivant un module premier, la propriété fondamentale permet de déduire quelques théorèmes exposés au chapitre V. Les chapitres IV et VI s'occupent spécialement des circulants.

Plusieurs années se sont écoulées depuis la rédaction de ce mémoire. Poursuivant nos recherches, nous avons ren-

(*) *Journal für reine und angew. Math.*, t. LI (1856).

contré plusieurs propositions nouvelles que nous avons formulées, sans démonstration, dans un appendice.

La propriété fondamentale des déterminants récurrents paraît devenir particulièrement féconde si on l'applique à la théorie des nombres algébriques. Elle permet de simplifier la solution de certains problèmes, notamment celui de la décomposition des nombres algébriques en leurs facteurs idéaux premiers. Mais cette théorie ne se prêtant pas à un exposé succinct, et la place dont nous disposons étant très restreinte, nous avons dû renoncer à aborder ce sujet.

ESSAIS ARITHMÉTIQUES

I.

Préliminaires

Les suites récurrentes jouant un grand rôle dans nos recherches, nous croyons utile d'expliquer notre terminologie et de résumer ici quelques notions dont nous aurons besoin ultérieurement.

Nous avons principalement consulté les ouvrages ou articles suivants :

Édouard Lucas, *Théorie des Nombres*. Paris 1891, pp. 299 et suivantes.

M. d'Ocagne, Mémoire sur les suites récurrentes. (*Journal de l'École Polytechnique*, 64e cahier [1894], p. 151.)

Ed. Maillet, Des conditions pour que l'échelle d'une suite récurrente soit irréductible. (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. XIV [1895], pp. 152 et 197.)

Ed. Maillet, Sur une application à l'analyse indéterminée de la théorie des suites récurrentes. (*Association française pour l'Avancement des Sciences*, 24e session [Bordeaux], 1895, p. 253.)

Fritz Cohn, Ueber die in recurrirender Weise gebildeten

Grössen und ihrem Zusammenhang mit den algebraischen Gleichungen. (*Mathematische Annalen*, t. XLIV [1894], p. 473.)

Les démonstrations que nous donnons de quelques-unes des propositions diffèrent de celles qui sont dues à ces auteurs.

1. Soit une suite indéfinie de nombres :

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, x_\nu, \ldots \tag{1}$$

Si, pour toutes les valeurs $\nu \geqq n$, on a

$$\alpha_\nu = a_0 x_\nu + a_1 x_{\nu-1} + a_2 x_{\nu-2} + \ldots + a_n x_{\nu-n} = 0, \tag{2}$$

la suite (1) est dite *récurrente d'ordre* n ou *de degré* n. M. d'Ocagne dit qu'elle est d'*échelle*

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Si $a_0 = 1$, l'échelle est représentée par

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Les quantités $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des constantes quelconques. Le polynome

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x^1 + a_n x^0$$

est dit le *générateur* de la suite (d'Ocagne), ou l'*échelle de récurrence* (Lucas), et même simplement l'*échelle*.

La signification du terme *échelle de récurrence* variant suivant les auteurs, nous renoncerons à son emploi et dirons que la suite (1) *satisfait à la loi de récurrence* $\alpha_\nu = 0$, ou encore qu'*elle a pour polynome générateur* f(x), et même, plus brièvement, qu'*elle obéit à la loi* f(x).

On remarquera que l'expression α_ν se déduit du polynome $f(x)$ en remplaçant les exposants de x par les indices corres-

pondants et en majorant ensuite ceux-ci d'un entier positif quelconque (*).

Pour abréger le discours, nous dirons que α_ν est la *transformée indiciale de* $x^{\nu-n}f(x)$.

Une suite récurrente est *déterminée* quand on en connaît le polynome générateur et n termes consécutifs.

2. La suite (1) admet aussi le polynome générateur

$$g(x) = f(x)(x - \rho).$$

En effet,

$$g(x) = (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_nx^0)(x - \rho)$$
$$= a_0x^{n+1} + a_1x^n + \cdots + a_nx^1 - \rho(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_nx^0).$$

La transformée indiciale de $x^{\nu-n-1}g(x)$ est $\alpha_\nu - \rho\alpha_{\nu-1}$; égalée à zéro, elle permet d'écrire les relations

$$\alpha_\nu = \rho\alpha_{\nu-1} = \rho^2\alpha_{\nu-2} = \cdots = \rho^{\nu-n}\alpha_n.$$

Or, si l'on prend pour les $n + 1$ termes initiaux de la suite ayant pour polynome générateur $g(x)$ les $n + 1$ premiers termes de la suite (1), on a

$$\alpha_n = 0, \qquad \alpha_{n+1} = 0, \ldots;$$

donc aussi pour $\nu \geqq n + 1$,

$$\alpha_\nu - \rho\alpha_{\nu-1} = 0.$$

La nouvelle suite obéissant à la loi $g(x)$ sera par conséquent identique avec la suite (1).

(*) Nous prolongeons la suite seulement *à droite;* Lucas la prolonge indéfiniment à droite et à gauche.

Posons $g_1(x) = f(x)\psi(x)$, $\psi(x)$ étant un polynome de degré q. D'après ce qui précède, la suite (1), obéissant à la loi de récurrence $f(x)$, satisfait aussi à la loi $g_1(x)$. Mais, inversement, une suite obéissant à la loi de récurrence $g_1(x)$ ne satisfait pas, en général, à la loi $f(x)$; en effet, la suite ayant pour loi $g_1(x)$ peut se construire en prenant arbitrairement les $n + q$ termes initiaux; les n premiers de ces termes peuvent être $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, mais les q termes initiaux suivants sont, généralement, différents de $x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+q-1}$.

Si une suite admet le polynome générateur $f(x)$ sans admettre de générateur d'un degré inférieur à n, on dit que la suite obéit à la loi de récurrence *irréductible* f(x). Nous dirons encore qu'elle est dans ce cas de *rang* n.

On peut toujours supposer que le coefficient a_0 de x^n dans le polynome générateur $f(x)$ est différent de zéro; car, s'il était nul, la suite considérée ne serait plus d'ordre n.

Si les coefficients $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{k+1}$ du polynome générateur $f(x)$ sont nuls, et que l'on supprime les $n - k$ termes initiaux $x_0, x_1, \ldots, x_{n-k-1}$ de la suite (1), on peut dire que la partie restante de la suite obéit à la loi de récurrence

$$a_0x^k + a_1x^{k-1} + a_2x^{k-2} + \cdots + a_k x^0.$$

Les $n - k$ termes initiaux de la suite (1) échappent en quelque sorte à la loi de récurrence; par cela même des suites récurrentes de ce genre ne présentent pas d'intérêt pour nos développements. Nous supposerons donc, en général, que le coefficient a_n du terme x_0 du polynome générateur $f(x)$ est différent de zéro. On remarquera toutefois que, sauf les cas spécifiés expressément, les théorèmes démontrés dans ce chapitre sont vrais, même si a_n est nul.

3. Lemme. — *Si, outre* f(x), *la suite* (1) *admet encore le polynome générateur* $f_1(x)$, *elle obéit aussi à la loi de récurrence* $Cf(x) + C'f_1(x)$, C *et* C′ *désignant des constantes ou des polynomes quelconques.*

Supposons d'abord $Cf(x)$ et $C'f_1(x)$ de même degré m et soient

$$Cf(x) = c_0 x^m + c_1 x^{m-1} + \cdots + c_m x^0,$$
$$C'f_1(x) = c'_0 x^m + c'_1 x^{m-1} + \cdots + c'_m x^0,$$

$c_0, c_1, \ldots, c_m, c'_0, c'_1, \ldots, c'_m$ désignant des constantes.

Pour toute valeur $\mu \geqq m$ on aura

$$c_0 x_\mu + c_1 x_{\mu-1} + \cdots + c_m x_{\mu-m} = 0,$$
$$c'_0 x_\mu + c'_1 x_{\mu-1} + \cdots + c'_m x_{\mu-m} = 0;$$

donc aussi

$$(c_0 + c'_0) x_\mu + (c_1 + c'_1) x_{\mu-1} + \cdots + (c_m + c'_m) x_{\mu-m} = 0.$$

Il en résulte le lemme énoncé ci-dessus.

Si le polynome $C'f_1(x)$ était seulement de degré $m - i$, il suffirait de supposer $c'_0 = c'_1 = c'_2 = \ldots = c'_{i-1} = 0$, $c'_i \neq 0$.

Théorème. — *Si la suite récurrente* (1) *admet deux polynomes générateurs* $f(x)$ *et* $f_1(x)$, *elle admet aussi comme générateur leur plus grand commun diviseur.*

En effet, la recherche du p. g. c. d. des fonctions $f(x)$ et $f_1(x)$ conduit à des polynomes $f_2(x), f_3(x), \ldots, f_k(x)$, entre lesquels il existe les relations

$$\begin{aligned}
f(x) &= f_1(x)\psi_1(x) + f_2(x),\\
f_1(x) &= f_2(x)\psi_2(x) + f_3(x),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
f_{k-2}(x) &= f_{k-1}(x)\psi_{k-1}(x) + f_k(x),\\
f_{k-1}(x) &= f_k(x)\psi_k(x),
\end{aligned}$$

où $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_k(x)$ désignent des polynomes. Par hypo-

thèse, la suite (1) obéit aux lois $f(x)$ et $f_1(x)$; donc, d'après le lemme précédent, elle obéit aussi à la loi $f(x) - f_1(x)\,\psi_1(x)$, c'est-à-dire à la loi $f_2(x)$. En continuant ce raisonnement, on voit qu'elle obéit aussi à la loi $f_k(x)$; or $f_k(x)$ est le plus grand commun diviseur des polynomes $f(x)$ et $f_1(x)$.

Il suit de là que *si la loi* $f_1(x)$ *est irréductible,* $f(x)$ *est un multiple de* $f_1(x)$. *Donc une suite récurrente n'admet qu'une seule loi irréductible.*

4. Nous appellerons *matrice de la suite récurrente* (1) la matrice

$$M = \left\| \begin{array}{cccccc} \dots & x_4 & x_3 & x_2 & x_1 & x_0 \\ \dots & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \\ \dots & x_6 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right\|,$$

qui peut être prolongée indéfiniment à gauche et au-dessous.

Nous dirons que tout déterminant formé avec k lignes et k colonnes de la matrice est un *mineur d'ordre* k *de* M, ou un *déterminant d'ordre* k *extrait de* M.

Lorsque nous voudrons spécifier qu'un mineur d'ordre k est formé au moyen de k lignes *consécutives* et de k colonnes *consécutives* de la matrice M, nous dirons qu'il est *régulier,* par opposition aux mineurs *irréguliers* qui ne sont pas formés au moyen de rangées consécutives de la matrice. Un mineur régulier d'ordre n sera appelé un *déterminant récurrent de loi* $f(x)$.

Pour passer d'une ligne d'un mineur régulier à la suivante, il suffit évidemment d'ajouter une unité à l'indice de chaque élément. Nous représenterons un tel mineur par sa première ligne et doublerons la première barre (*).

(*) Nous emploierons cette notation toutes les fois que, pour passer d'une ligne d'un déterminant à la suivante, il suffit d'ajouter une unité à l'indice de chaque élément.

Nous entourons d'une double barre, à droite et à gauche, une matrice rectangulaire d'éléments.

Ainsi

$$\| \; x_\nu \quad x_{\nu-1} \ldots x_{\nu-k-1} \; \| \; (*)$$

est un mineur régulier d'ordre k de la matrice M.

5. *Tous les mineurs de la matrice* M *d'ordre supérieur à l'ordre* n *du polynome générateur sont nuls.*

Si, par exemple, a, b, ..., h et β, γ, ..., θ sont des suites respectivement de $n+1$ et de n nombres entiers, il faudrait montrer que le déterminant de $(n+1)^{\text{me}}$ ordre

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} x_a & x_b & \ldots & x_h \\ x_{a+\beta} & x_{b+\beta} & \ldots & x_{h+\beta} \\ x_{a+\gamma} & x_{b+\gamma} & \ldots & x_{h+\gamma} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{a+\theta} & x_{b+\theta} & \ldots & x_{h+\theta} \end{vmatrix}$$

est nul.

La loi de récurrence (2) permet d'exprimer un terme quelconque de la suite (1) en fonction des termes initiaux $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. Faisons-le pour les $n+1$ termes $x_a, x_b, \ldots, x_h$. Nous aurons ainsi les $n+1$ relations

$$(4) \qquad \begin{cases} x_a = P_a x_{n-1} + Q_a x_{n-2} + \ldots + S_a x_0, \\ x_b = P_b x_{n-1} + Q_b x_{n-2} + \ldots + S_b x_0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot, \\ x_h = P_h x_{n-1} + Q_h x_{n-2} + \ldots + S_h x_0, \end{cases}$$

(*) HANKEL a étudié de tels déterminants dans l'écrit « Ueber eine besondere Klasse der symmetrischen Determinanten ». (*Inaug. Diss.* Leipzig. Göttingen 1861). Il les appelle *orthosymétriques*.

SYLVESTER les a appelés *persymétriques*.

G. FROBENIUS leur donne le nom de déterminants *récurrents* (*Sitzungsber.*

où P_a, Q_a, S_a, P_b, ... sont des fonctions des coefficients du polynome $f(x)$.

Il est évident que les relations (4) ne cessent pas d'être vraies si l'on ajoute un même nombre entier i aux indices des x, puisque cela revient à faire commencer la suite récurrente au terme x_i.

Remplaçons dans le déterminant (3) les éléments par leur valeur tirée des relations (4) et de celles qui s'en déduisent en ajoutant respectivement β, γ, ..., θ aux indices des x. On voit aisément que le déterminant résultant est le produit de la multiplication par lignes des deux déterminants

$$D_1 = \begin{vmatrix} x_{n-1} & x_{n-2} & \dots & x_0 & 0 \\ x_{n-1+\beta} & x_{n-2+\beta} & \dots & x_\beta & 0 \\ x_{n-1+\gamma} & x_{n-2+\gamma} & \dots & x_\gamma & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-1+\theta} & x_{n-2+\theta} & \dots & x_\theta & 0 \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} P_a & Q_a & \dots & S_a & 0 \\ P_b & Q_b & \dots & S_b & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_h & Q_h & \dots & S_h & 0 \end{vmatrix}.$$

Les déterminants D_1 et D_2 étant nuls, il en est de même du déterminant (3).

Remarque. — Tous les mineurs de la matrice M d'un ordre supérieur à $n + 1$ sont évidemment nuls.

On appelle *rang* d'une matrice ou d'un déterminant l'ordre de ses mineurs non nuls d'ordre le plus élevé.

Akad. Berlin, 1894, p. 253; *Journal für reine u. angew. Math.*, t. CXIV [1895], p. 200.)

E. Pascal les appelle *déterminants de Hankel*. (*Die Determinanten*, trad. Herm. Leitzmann, Leipzig 1900.)

6. *Si* n + r *termes consécutifs d'une suite récurrente admettant le polynome générateur*

$$b_0x^r + b_1x^{r-1} + \cdots + b_r x^0 \tag{5}$$

coïncident respectivement avec les termes $x_0, x_1, \ldots, x_{n+r-1}$ *de la suite* (1) *de loi* f(x), *les deux suites coïncident également au delà du terme* x_{n+r-1}.

En effet, x_{n+r} et x'_{n+r} désignant respectivement les termes qui suivent x_{n+r-1} dans la suite (1) et dans celle de loi (5), on a les $n + r$ 1 relations

$$\begin{aligned}
a_0x_n &+ a_1x_{n-1} + \cdots + a_nx_0 = 0,\\
a_0x_{n+1} &+ a_1x_n + \cdots + a_nx_1 = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
a_0x_{n+r-1} &+ a_1x_{n+r-2} + \cdots + a_nx_{r-1} = 0,\\
a_0x_{n+r} &+ a_1x_{n+r-1} + \cdots + a_nx_r = 0.
\end{aligned}$$

Additionnons ces égalités membre à membre après les avoir multipliées respectivement par $b_r, b_{r-1}, \ldots, b_1, b_0$. En vertu de la loi de récurrence exprimée par le polynome (5), les coefficients de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de l'égalité résultante sont nuls; donc celle-ci se réduit à la relation

$$(b_rx_n + b_{r-1}x_{n+1} + \cdots + b_1x_{n+r-1}) + b_0x_{n+r} = 0.$$

Or la quantité entre parenthèses est évidemment égale à $-b_0\,x'_{n+r}$. On a donc

$$x_{n+r} = x'_{n+r}.$$

En faisant commencer les deux suites au terme x_1, on démontrerait de même que leurs termes d'indice $n + r + 1$ coïncident, etc.

7. *Une suite récurrente est de même rang que sa matrice* (*).

Supposons que la suite récurrente (1) obéisse à la loi de récurrence *irréductible* d'ordre r

$$x^r + b_1 x^{r-1} + b_2 x^{r-2} + \cdots + b_r x^0. \tag{6}$$

On a les r égalités

$$\left\{\begin{array}{l} -x_r = b_1 x_{r-1} + b_2 x_{r-2} + \cdots + b_r x_0, \\ -x_{r+1} = b_1 x_r + b_2 x_{r-1} + \cdots + b_r x_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ -x_{2r-1} = b_1 x_{2r-2} + b_2 x_{2r-3} + \cdots + b_r x_{r-1}. \end{array}\right. \tag{7}$$

Je dis que si l'on considère b_1, b_2, ..., b_r comme des inconnues, le déterminant du système (7) est différent de zéro. En effet, si l'on avait

$$\Delta_{r-1} = \| \; x_{r-1} \quad x_{r-2} \quad \cdots \quad x_0 \; | = 0,$$

le système d'équations (7) admettrait plus d'une solution. Désignant par b'_1, b'_2, ..., b'_r une solution différente de b_1, b_2, ..., b_r, on aurait les égalités

$$\left\{\begin{array}{l} -x_r = b'_1 x_{r-1} + b'_2 x_{r-2} + \cdots + b'_r x_0, \\ -x_{r+1} = b'_1 x_r + b'_2 x_{r-1} + \cdots + b'_r x_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ -x_{2r-1} = b'_1 x_{2r-2} + b'_2 x_{2r-3} + \cdots + b'_r x_{r-1}. \end{array}\right. \tag{8}$$

Or il est facile de voir que la suite récurrente qui obéit à la loi de récurrence

$$x^r + b'_1 x^{r-1} + b'_2 x^{r-2} + \cdots + b'_r x^0$$

(*) L. KRONECKER a donné de ce théorème un énoncé différent dans son mémoire « Zur Theorie der Elimination einer Variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen ». (*Monatsber. Akad. Berlin*, 1881, p. 560.)

et dont les termes initiaux sont $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}$ coïncide avec la suite (1). En effet, en vertu des relations (8), les termes $x_r, x_{r+1}, \ldots, x_{2r-1}$ sont communs aux deux suites. Dès lors celles-ci coïncident dans toute leur étendue comme ayant $2r$ termes consécutifs $x_0, x_1, \ldots, x_{2r-1}$ communs [6] (*). Mais alors la suite (1) obéirait à deux lois de récurrence différentes de même degré r, l'une de ces deux lois étant irréductible ; ce qui est impossible [3].

Tous les mineurs de la matrice M d'un ordre supérieur à r étant nuls [5] et l'un au moins des mineurs d'ordre r étant différent de zéro, la matrice est de rang r [5, Rem.], c'est-à-dire de même rang que la suite récurrente considérée.

Remarque I. — Si la suite récurrente (1) obéit à la loi irréductible (6) et que l'on pose

$$\Delta_\nu = \| x_\nu \quad x_{\nu-1} \quad \ldots \quad x_{\nu-r+1} \| \quad (\nu = r-1, r, \ldots),$$

on a la relation

$$\Delta_{\nu+1} = (-1)^r b_r \Delta_\nu. \tag{9}$$

En effet, à la première colonne du déterminant $\Delta_{\nu+1}$, ajoutons les $r-1$ suivantes multipliées respectivement par $b_1, b_2, \ldots, b_{r-1}$; les termes de cette colonne, en vertu de la loi de récurrence (6), se réduisent à $-b_r x_{\nu-r+1}$, $-b_r x_{\nu-r+2}$, ..., $-b_r x_\nu$. On en déduit immédiatement l'égalité (9).

On voit aisément que l'on a aussi l'égalité

$$\Delta_\nu = (-1)^{r\nu} b_r^{\nu-r+1} \Delta_{r-1}. \tag{10}$$

Donc, *si une suite récurrente est de rang* r, *tout mineur régulier d'ordre* r *de sa matrice est différent de zéro.*

(*) Le renvoi à un autre paragraphe est indiqué par le numéro du paragraphe en caractères gras entre crochets.

Cette conclusion ne serait évidemment pas permise si b_r était nul [**2**].

Remarque II. — *Un mineur irrégulier d'ordre* r *de la matrice* M *de rang* r *est divisible par* Δ_{r-1}.

Soient a, b, ..., g, et β, γ, ..., ε respectivement deux suites de r et de $r-1$ nombres entiers distincts entre eux. Considérons le mineur irrégulier d'ordre r

$$I = \begin{vmatrix} x_a & x_b & \cdots & x_g \\ x_{a+\beta} & x_{b+\beta} & \cdots & x_{g+\beta} \\ x_{a+\gamma} & x_{b+\gamma} & \cdots & x_{g+\gamma} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_{a+\varepsilon} & x_{b+\varepsilon} & \cdots & x_{g+\varepsilon} \end{vmatrix}.$$

La loi de récurrence (6) permet d'exprimer un terme quelconque de la suite récurrente (1) en fonction des termes initiaux x_0, x_1, ..., x_{r-1}. On obtient ainsi pour les termes x_a, x_b, ..., x_g les r relations

$$(11) \quad \begin{cases} x_a = K_a x_{r-1} + L_a x_{r-2} + \cdots + N_a x_0, \\ x_b = K_b x_{r-1} + L_b x_{r-2} + \cdots + N_b x_0, \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot, \\ x_g = K_g x_{r-1} + L_g x_{r-1} + \cdots + N_g x_0, \end{cases}$$

où K_a, L_a, N_a, K_b, ... sont des fonctions des coefficients du polynome $f(x)$.

Il est évident que les relations (11) ne cessent pas d'être vraies si l'on ajoute un même nombre entier aux indices des x.

Remplaçons dans le déterminant I les éléments par leur valeur tirée des relations (11) et de celles qui s'en déduisent en ajoutant respectivement β, γ, ..., ε aux indices des x. On

voit aisément que le déterminant résultant est le produit de la multiplication par lignes des deux déterminants

$$D = \begin{vmatrix} x_{r-1} & x_{r-2} & \dots & x_0 \\ x_{r-1+\beta} & x_{r-2+\beta} & \dots & x_\beta \\ x_{r-1+\gamma} & x_{r-2+\gamma} & \dots & x_\gamma \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{r-1+\varepsilon} & x_{r-2+\varepsilon} & \dots & x_\varepsilon \end{vmatrix},$$

$$D' = \begin{vmatrix} K_a & L_a & \dots & N_a \\ K_b & L_b & \dots & N_b \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_g & L_g & \dots & N_g \end{vmatrix}.$$

On a les égalités suivantes, semblables aux relations (11) :

$$(12) \quad \begin{cases} x_0 = 0x_{r-1} + 0x_{r-2} + \dots + x_0, \\ x_\beta = K_\beta x_{r-1} + L_\beta x_{r-2} + \dots + N_\beta x_0, \\ x_\gamma = K_\gamma x_{r-1} + L_\gamma x_{r-2} + \dots + N_\gamma x_0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_\varepsilon = K_\varepsilon x_{r-1} + L_\varepsilon x_{r-2} + \dots + N_\varepsilon x_0. \end{cases}$$

Remplaçons dans le déterminant D les éléments par leur valeur tirée des relations (12) et de celles qui s'en déduisent en ajoutant respectivement 1, 2, ..., $r-1$ aux indices des x. Il est facile de voir que le déterminant résultant s'obtient en multipliant successivement les lignes du déterminant

$$D'' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ N_\beta & & \dots & L_\beta & K_\beta \\ N_\gamma & & \dots & L_\gamma & K_\gamma \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ N_\varepsilon & & \dots & N_\varepsilon & K_\varepsilon \end{vmatrix}$$

par les colonnes du déterminant Δ_{r-1}.

On a donc la relation

$$I = DD' = D'D''\Delta_{r-1}. \tag{13}$$

En ajoutant une unité aux indices de tous les éléments du mineur irrégulier I, on obtient un nouveau mineur I_1. Si l'on exprime les éléments de I_1 en fonction, non plus de $x_0, x_1, \ldots, x_{r-1}$, mais de $x_1, x_2, \ldots, x_r$, et que, sauf cette différence, on procède comme on vient de le faire pour I, on trouve

$$I_1 = D'D''\Delta_r,$$

et, en tenant compte de l'égalité (9),

$$I_1 = (-1)^r b_r D'D''\Delta_{r-1} = (-1)^r b_r I.$$

Plus généralement, si I_0 est un mineur d'ordre r de la matrice M de rang r, I_g le mineur déduit du mineur I_0 en augmentant les indices de ses éléments d'un nombre g, on a la relation

$$I_g = (-1)^{rg} b_r^g I_0,$$

qui est une généralisation de la relation (10).

Remarque III. — Les mineurs irréguliers d'ordre r peuvent être nuls.

Supposons, par exemple, que b_2 soit nul. On déduit du système d'équations (7) une valeur de b_2 donnée par une fraction dont le numérateur s'obtient en remplaçant la seconde colonne du déterminant Δ_{r-1} par $-x_r, -x_{r+1}, \ldots, -x_{2r-1}$. On en conclut que le mineur irrégulier

$$E = \begin{vmatrix} x_r & x_{r-1} & x_{r-3} & x_{r-4} & \ldots & x_0 \end{vmatrix}$$

de la matrice M est nul.

Si l'on exprime les éléments du mineur E en fonction de $x_0, x_1, \ldots, x_{r-1}$, on arrive à une relation analogue à l'égalité (13). Elle donne la valeur de E sous forme d'un produit de trois déterminants. L'un d'eux, Δ_{r-1}, est différent de zéro; donc l'un des déterminants correspondant à D′ ou à D″ devra être nul.

8. Comme dans le cours de cette étude nous ne considérerons que des suites récurrentes à termes rationnels, nous pouvons supposer que tous les coefficients du polynome générateur $f(x)$ sont entiers. Un tel polynome sera dit *irréductible*, ou même *premier*, s'il n'admet pas pour diviseur un polynome à coefficients entiers d'un degré inférieur.

Si le polynome générateur est irréductible, il en est évidemment de même de la loi de récurrence à laquelle obéit la suite. Mais la réciproque n'est pas vraie. Ainsi une suite *fondamentale* d'ordre n, c'est-à-dire celle dont les n termes initiaux sont 0, 0, ..., 0, 1, obéit toujours à une loi irréductible d'ordre n, même si le polynome générateur est réductible.

9. *Étant donnée la suite récurrente* (1) *obéissant à la loi de récurrence* f(x), *la suite*

$$Ax_\alpha + Bx_\beta + Cx_\gamma + \cdots, Ax_{\alpha+1} + Bx_{\beta+1} + Cx_{\gamma+1} + \cdots, Ax_{\alpha+2} + \cdots,$$

où A, B, C, ... *sont des constantes, obéit également à la loi de récurrence* f(x).

En effet, si l'on pose

$$\begin{aligned} u_0 &= Ax_\alpha + Bx_\beta + Cx_\gamma, \\ u_1 &= Ax_{\alpha+1} + Bx_{\beta+1} + Cx_{\gamma+1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ u_n &= Ax_{\alpha+n} + Bx_{\beta+n} + Cx_{\gamma+n}, \end{aligned}$$

il est facile de voir que

$$u_n + a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_n u_0 = 0.$$

La même relation a encore lieu si l'on augmente les indices des u d'un nombre k, puisque cela revient à faire commencer la suite (1) au terme x_k. Le théorème est donc démontré.

10. Dans la suite, nous rencontrerons des systèmes de congruences linéaires à plusieurs variables considérées suivant un module premier. Leur théorie est analogue à celle des systèmes d'équations linéaires, en vertu du principe que, si l'on s'en tient aux opérations rationnelles et aux modules premiers, les congruences sont soumises aux mêmes règles de calcul que les équations (*).

Les démonstrations des nos 1-9 utilisent exclusivement des équations linéaires; les théorèmes qui y sont établis doivent donc avoir leur analogue si l'on remplace les équations par des congruences suivant un module premier.

Pour le moment, nous nous contenterons de signaler ce point sur lequel nous reviendrons [**30**].

11. Certains théorèmes sur les congruences linéaires suivant un module premier sont encore vrais pour les modules composés. Le suivant nous sera utile :

Si les éléments de chaque ligne (*ou de chaque colonne*) *d'un déterminant vérifient pour le module* m *une même congruence linéaire homogène, dont un coefficient au moins est premier à* m, *ce déterminant est congru à zéro* (*mod.* m).

Soit le déterminant de n^2 éléments

$$(14) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(*) On lira avec intérêt les pages que M. E. Cahen a consacrées à la question (*Théorie des Nombres*. Paris 1914, §§ 414-419), ainsi que le mémoire de T.-J. Stieltjes « Sur la Théorie des Nombres ». (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* t. IV [1890], 3e fasc., p. 49.)

Supposons que pour une ligne quelconque du déterminant on ait la congruence

$$\lambda_1 a_{i1} + \lambda_2 a_{i2} + \cdots + \lambda_n a_{in} \equiv 0 \pmod{m}, \tag{15}$$

où $i = 1, 2, \ldots, n$, l'un au moins λ_k de ses coefficients étant supposé premier à m. Multiplions les éléments de la k^{me} colonne du déterminant (14) par λ_k et ajoutons-y les éléments des autres colonnes multipliées respectivement par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Le déterminant (14) multiplié par λ_k sera égal à un autre déterminant dont tous les éléments de la k^{me} colonne sont, en vertu de la relation (15), congrus à zéro (mod. m). Donc le déterminant (14) est congru à zéro (mod. m).

II.

Définition des formes $\varphi(f)$.

12. Soit

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x^1 + a_n x^0$$

un polynome de degré n, à coefficients entiers, ordonné suivant les puissances décroissantes de la variable x.

Désignons par $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ les racines de l'équation $f(x) = 0$. Si parmi elles il se trouvait des racines multiples, nous leur donnerions des indices différents. Formons un produit de m facteurs avec des indices différents de ρ pris parmi les n quantités

$$x - \rho_1, \quad x - \rho_2, \quad \ldots, \quad x - \rho_t, \quad \ldots, \quad x - \rho_n.$$

La transformée indiciale d'un tel produit sera, par exemple,

$$F = x_m + K_1 x_{m-1} + K_2 x_{m-2} + \cdots + K_{m-1} x_1 + K_m x_0.$$

On aura C_n^m expressions semblables de F; leur produit est une forme homogène des variables x_m, x_{m-1}, ..., x_1, x_0 de degré $C_{n'}^m$. Cette forme étant une fonction symétrique des n racines de l'équation $f(x) = 0$, ses coefficients sont des fonctions réelles des coefficients a_1, a_2, ..., a_n de $f(x)$.

Parmi les différentes formes engendrées de la sorte, la plus simple correspond à $m = 1$. Dans ce cas, la forme résultante $\Pi(x_1 - x_0\rho_i)$ est la forme du n^{me} degré à deux variables

$$x_1^n + a_1 x_1^{n-1} x_0 + a_2 x_1^{n-2} x_0^2 + \cdots + a_{n-1} x_1 x_0^{n-1} + a_n x_0^n.$$

Une autre forme particulièrement simple correspond au cas où $m = n - 1$. C'est à l'étude de ses propriétés que ce travail sera consacré. La forme considérée est du n^{me} degré à n variables. Nous l'appellerons *forme associée de* f(x) et nous la représenterons par $\varphi(f)$ ou par $\varphi(x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n x^0)$.

En désignant par F_i la transformée indiciale de $\frac{f(x)\ (*)}{x - \rho_i}$, $\varphi(f)$ est égal au produit de n facteurs F_1, F_2, ..., F_n que nous appellerons les *facteurs* F *de* φ(f). Nous dirons que le facteur F_i *correspond* à la racine ρ_i. Enfin nous représenterons par $\varphi(c_0, c_1, \ldots, c_n)$ la valeur que prend $\varphi(f)$ quand on y remplace les variables x_0, x_1, ..., x_{n-1} respectivement par $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$.

Remarque. — Si l'équation $f(x) = 0$ est irréductible, on peut considérer F_i comme un nombre algébrique du corps de nombres déterminé par ρ_i; les facteurs F_1, F_2, ..., F_n sont alors des nombres algébriques *conjugués* (**) dont la norme est $\varphi(f)$.

(*) Il est bien entendu qu'il s'agit du polynome obtenu en divisant $f(x)$ par $x - \rho_i$.

(**) David Hilbert, Die Theorie der algebraischen Zahlkörper. (*Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, t. IV [1894-1895], p. 178.)

13. La forme associée d'une fonction du second degré $x^2 + a_1 x + a_2$ est

$$\varphi(x^2 + a_1 x + a_2) = x_1^2 + a_1 x_1 x_0 + a_2 x_0^2.$$

Celle de

$$f(x) = x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$$

est

$$\varphi(f) = F_1 F_2 F_3,$$

où l'on pose

$$F_1 = x_2 - (\rho_2 + \rho_3) x_1 + \rho_2 \rho_3 x_0,$$
$$F_2 = x_2 - (\rho_3 + \rho_1) x_1 + \rho_3 \rho_1 x_0,$$
$$F_3 = x_2 - (\rho_1 + \rho_2) x_1 + \rho_1 \rho_2 x_0.$$

Tenant compte des relations

$$\Sigma \rho_1 = - a_1, \quad \Sigma \rho_1 \rho_2 = a_2, \quad \rho_1 \rho_2 \rho_3 = - a_3,$$

on trouve

$$\varphi(f) = x_2^3 + (a_1 a_2 - a_3) x_1^3 + a_3^2 x_0^3 + a_2 x_0 x_2^2 + 2 a_1 x_1 x_2^2$$
$$+ (a_2^2 + a_1 a_3) x_0 x_1^2 + (a_1^2 + a_2) x_1^2 x_2 + 2 a_2 a_3 x_0^2 x_1 + a_1 a_3 x_0^2 x_2$$
$$+ (a_1 a_2 + 3 a_3) x_0 x_1 x_2.$$

Le développement de la forme $\varphi(f)$ en fonction des coefficients du polynome $f(x)$ devient très long pour des degrés supérieurs. Les suites récurrentes conduisent à des expressions plus maniables de $\varphi(f)$.

14. Soit

(1) $$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots, \quad x_{\nu}, - \ldots$$

une suite récurrente ayant $f(x)$ comme polynome générateur.

ρ étant une racine de l'équation $f(x) = 0$, on peut écrire

$$f(x) = (x - \rho)(x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}x^0)$$
$$= x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x^1 - \rho(x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x^0).$$

La loi de récurrence exige que la transformée indiciale de $x^{\nu-n}f(x)$ soit nulle; on a donc

$$x_\nu + b_1 x_{\nu-1} + \cdots + b_{n-1}x_{\nu-n+1} = \rho(x_{\nu-1} + b_1 x_{\nu-2} + \cdots + b_{n-1}x_{\nu-n}).$$

Posant

$$\eta_{1\nu} = x_\nu + b_1 x_{\nu-1} + \cdots + b_{n-1}x_{\nu-n+1},$$

on a les relations

$$(2) \qquad \eta_{1\nu} = \rho\eta_{1\nu-1} = \rho^2\eta_{1\nu-2} = \cdots = \rho^{\nu-n+1}\eta_{1n-1}.$$

On remarquera que η_{1n-1} est la transformée indiciale de $\frac{f(x)}{x-\rho}$ (*).

Soit

$$(3) \qquad x'_0, \quad x'_1, \quad x'_2, \quad \ldots$$

une suite récurrente obéissant à la loi $f(x)$ et dont les n termes initiaux seraient

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{n-2}, \quad x_{n-1} - u.$$

Comme la suite (3) obéit à la loi $f(x)$, elle donne lieu aux relations suivantes analogues aux relations (2)

$$(4) \qquad \eta'_{1\nu} = \rho\eta'_{1\nu-1} = \rho^2\eta'_{1\nu-2} = \cdots = \rho^{\nu-n+1}\eta'_{1n-1},$$

(*) Voyez note (*), p. 18.

où l'on pose

$$\eta'_\nu = x'_\nu + b_1 x'_{\nu-1} + \cdots + b_{n-1} x'_{\nu-n+1}.$$

Mais

$$\eta'_{n-1} = x'_{n-1} + b_1 x'_{n-2} + \cdots + b_{n-1} x'_0$$
$$= x_{n-1} - u + b_1 x_{n-2} + \cdots + b_{n-1} x_0 = \mathrm{F} - u.$$

Donc si l'on fait $u = \mathrm{F}$, il vient $\eta'_{n-1} = 0$, et, en vertu de (4),

$$\eta'_{n-1} = \eta'_n = \eta'_{n+1} = \cdots = 0.$$

On peut encore dire que si $u = \mathrm{F}$, la suite (3) a pour polynome générateur :

$$x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \cdots + b_{n-1} x .$$

Mais alors le déterminant d'ordre n

$$\psi(u) = \| \; x'_{n-1} \quad x'_{n-2} \quad \cdots \quad x'_0 \; |$$

est nul [5]. L'équation $\psi(u) = 0$ étant du n^me^ degré en u et s'annulant pour $u = \mathrm{F}$, ses racines sont F_1, F_2, ..., F_n. Le produit de ces racines est égal, à un facteur constant près, au terme de $\psi(u)$ indépendant de u. Or ce terme est précisément le déterminant

$$\Delta_{n-1} = \| \; x_{n-1} \quad x_{n-2} \quad \cdots \quad x_0 \; | \; .$$

Comme le terme x^n_{n-1} a pour coefficient l'unité, aussi bien dans la forme $\varphi(f)$ que dans le déterminant Δ_{n-1}, il s'ensuit que

$$\varphi(f) = \Delta_{n-1}. \tag{5}$$

Remarquons que l'égalité (5) est une identité si l'on y considère les quantités x_0, x_1, ..., x_{n-1} comme des variables arbi-

traires, x_n, x_{n+1}, ..., x_{2n-2} étant exprimées en fonction de ces variables au moyen de la loi de récurrence.

Remarque I. — Si la suite récurrente (1) est de rang $r < n$, le déterminant Δ_{n-1} s'annule et est également de rang r.

Exprimons les éléments du déterminant $\psi(u)$ par leurs valeurs en fonction de x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1} et de u. On a les égalités

$$x_n + a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \cdots + a_n x_0 = 0,$$
$$x'_n + a_1(x_{n-1} - u) + a_2 x_{n-2} + \cdots + a_n x_0 = 0,$$

desquelles on déduit par soustraction

$$x'_n = x_n + a_1 u.$$

De même des égalités

$$x_{n+1} + a_1 x_n + a_2 x_{n-1} + \cdots + a_n x_1 = 0,$$
$$x'_{n+1} + a_1(x_n + a_1 u) + a_2(x_{n-1} - u) + \cdots + a_n x_1 = 0,$$

on déduit

$$x'_{n+1} = x_{n+1} + (a_2 - a_1^2)u.$$

En continuant de la sorte, on verrait qu'à partir de x_{n-1} un terme de la suite (3) est égal à son homologue de la suite (1) augmenté du produit de u par une certaine fonction des coefficients a_1, a_2, ... du polynome générateur $f(x)$.

La suite récurrente (1) étant de rang r, le développement de $\psi(u)$ suivant les puissances de u n'a pas de termes en u^0, u^1, u^2, ..., u^{n-r-1}, car ces puissances de u sont multipliées par des mineurs d'ordre supérieur à r de la matrice de la suite (1). On conclut de là que l'équation $\psi(u) = 0$, qui est de degré n, a $n - r$ racines nulles.

On peut du reste démontrer directement que, dans ce cas,

$n - r$ des facteurs $F_1, F_2, \ldots, F_n$ s'annulent. En effet, soit $f_1(x)$ la loi de récurrence irréductible de degré r à laquelle obéit la suite (1). Désignons par ρ une racine de l'équation $f(x) = 0$ non comprise parmi celles de l'équation $f_1(x) = 0$. La suite récurrente (1) admet le polynome générateur $\frac{f(x)}{x-\rho}$, puisque celui-ci est divisible par $f_1(x)$. Dès lors la loi de récurrence exige que la transformée indiciale de $\frac{f(x)}{x-\rho}$, c'est-à-dire le facteur F correspondant à la racine ρ [**12**], s'annule. On en conclut que $n - r$ des n facteurs $F_1, F_2, \ldots, F_n$ s'annulent.

Réciproquement, si $n - r$ des facteurs $F_1, F_2, \ldots, F_n$ s'annulent, la suite récurrente (1) et le déterminant Δ_{n-1} sont de rang r. En effet, supposons que le facteur F qui correspond à la racine ρ s'annule. Si l'on remarque que $\eta_{n-1} = F$, il résulte des relations (2) que η_ν s'annule pour toute valeur $\nu \leqq n - 1$. Mais η_ν est la transformée indiciale de $\frac{x^{\nu-n+1}f(x)}{x-\rho}$. On en conclut que la suite récurrente (1) admet le polynome générateur $\frac{f(x)}{x-\rho}$. Celui-ci doit évidemment être divisible par le polynome générateur $f_2(x)$, qui est l'expression de la loi de récurrence irréductible à laquelle obéit la suite (1). Ceci n'est possible que si ρ n'est pas une racine de l'équation $f_2(x) = 0$. Comme on peut dire la même chose des $n - r$ racines de l'équation $f(x) = 0$ correspondant aux $n - r$ facteurs F qui s'annulent, on conclut que $f_2(x)$ est au plus de degré r. Il ne peut du reste être d'un degré $r' < r$, car sinon $n - r'$ facteurs F s'annuleraient, ce qui est contraire à l'hypothèse.

III.

Propriétés des formes $\varphi(f)$.

15. Soit la forme

$$\varphi(f) = \varphi(x_0, x_1, \ldots x_{n-1})$$

associée du polynome

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_nx^0.$$

Si l'on désigne par ρ_i une racine de l'équation $f(x) = 0$, on peut écrire l'égalité

$$f(x) = (x - \rho_i)(b_{i0}x^{n-1} + b_{i1}x^{n-2} + b_{i2}x^{n-3} + \cdots + b_{i,n-1}x^0)$$

où

$$(1) \qquad \begin{cases} b_{i0} = 1, \\ \rho_i b_{i,k-1} = b_{ik} - a_k, \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \\ \rho_i b_{i,n-1} = -a_n. \end{cases}$$

Pour les valeurs

$$(2) \quad x_0 = x_1 = \cdots = x_{n-3} = 0, \quad x_{n-2} = -y_0, \quad x_{n-1} = y_1 + a_1 y_0$$

des variables, le facteur F_i de $\varphi(f)$ devient [**12**]

$$F_i = y_1 + (a_1 - b_{i1})y_0 = y_1 - y_0\rho_i.$$

On a donc la relation

$$\varphi(0, 0, \ldots, 0, \quad -y_0, y_1 + a_1 y_0) = \prod (y_1 - y_0\rho_i). \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Or $\Pi(y_1 - y_0\rho_i)$ est la forme du n^me^ degré à deux variables que nous avons signalée au n° 12. Elle est égale à

$$(3) \qquad y_1^n + a_1 y_1^{n-1} y_0 + a_2 y_1^{n-2} y_0^2 + \cdots + a_n y_0^n.$$

Il en résulte que la forme (3) peut être égalée à une forme $\varphi(f)$, c'est-à-dire à un déterminant récurrent du n^me^ ordre de

loi $f(x)$ [4] et dont les éléments initiaux $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ sont donnés par les relations (2).

16. Les variables $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ ayant des valeurs quelconques, le facteur F_i de $\varphi(f)$ a la forme

$$(4) \qquad b_{i0}x_{n-1} + b_{i1}x_{n-2} + \cdots + b_{i,n-1}x_0.$$

Le produit $(y_1 - y_0\rho_i)\ F_i$ est donc

$$(5) \quad b_{i0}x_{n-1}y_1 + \sum (b_{ik}x_{n-k-1}y_1 - \rho_i b_{i,k-1}x_{n-k}y_0) - \rho_i b_{i,n-1}x_0y_0.$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Tenant compte des relations (1) ainsi que de l'égalité

$$x_n + a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2} + \cdots + a_nx_0 = 0,$$

et posant

$$(6) \quad x_{n-k-1}y_1 - x_{n-k}y_0 = z_{n-k-1} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

l'expression (5) devient

$$b_{i0}z_{n-1} + b_{i1}z_{n-2} + \cdots + b_{i,n-1}z_0.$$

Elle ne diffère de (5) que par le changement de la variable x en z. C'est donc le facteur F_i de la forme

$$\varphi(z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}),$$

dans laquelle les variables sont déterminées par la relation (6). On en conclut que *le produit de la forme générale* $\varphi(f)$ *par la forme* (3) *peut s'exprimer au moyen d'une forme* $\varphi(f)$ *dans laquelle les variables sont données par les relations* (6).

Remarque. — Un terme quelconque z_ν de la suite récurrente obéissant à la loi $f(x)$ et dont les éléments initiaux sont

$z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ peut s'exprimer, en fonction des termes de la suite récurrente $x_0, x_1, \ldots, x_\nu$ obéissant à la même loi, au moyen de la relation

$$z_\nu = x_\nu y_1 - x_{\nu+1} y_0.$$

Cela résulte immédiatement du théorème du n° 9.

17. — Donnons aux variables de la forme $\varphi(f)$ les valeurs

$$(7) \qquad x_0 = 1, \quad x_1 = X, \quad x_2 = X^2, \ldots, x_{n-1} = X^{n-1},$$

et désignons par $x_n, x_{n+1}, \ldots$ les termes d'une suite récurrente de loi $f(x)$ dont les n termes initiaux auraient les valeurs (7).

De la loi de récurrence

$$x_\nu + a_1 x_{\nu-1} + a_2 x_{\nu-2} + \cdots + a_n x_{\nu-n} = 0,$$

il résulte que le terme x_n de la suite récurrente satisfait à la relation

$$(8) \qquad x_n + f(X) - X^n = 0.$$

Or, $\varphi(1, X, X^2, \ldots, X^{n-1})$ est égal au déterminant [**12**]

$$(9) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} X^{n-1} & X^{n-2} & \ldots & X & 1 \\ x_n & X^{n-1} & \ldots & X^2 & X \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{2n-2} & x_{2n-3} & \ldots & x_n & X^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Si, dans ce déterminant, on retranche les éléments de la dernière colonne multipliés par X de ceux de l'avant dernière colonne, celle-ci se réduit à son dernier élément, qui, en tenant compte de la relation (8), devient $-f(X)$. Par suite

$$\Delta = f(X) \begin{vmatrix} X^{n-1} & X^{n-2} & \ldots & X^2 & 1 \\ x_n & X^{n-1} & \ldots & X^3 & X \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{2n-3} & x_{2n-4} & \ldots & x_n^1 & X^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Retranchant la dernière colonne multipliée par X^2 de l'avant-dernière, celle-ci se réduit à son dernier terme qui est égal à $-f(X)$. On a donc

$$\Delta = [f(X)]^2 \begin{vmatrix} X^{n-1} & X^{n-2} & \dots & X^2 & 1 \\ x_n & X^{n-1} & \dots & X^4 & X \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{2n-4} & x_{2n-5} & \dots & x_n & X^{n-3} \end{vmatrix}.$$

En continuant de la sorte, on trouve

$$\Delta = [f(X)]^{n-1}.$$

On remarquera que les éléments qui se trouvent au-dessous de la ligne inclinée des x_n du déterminant (9) n'interviennent à aucun moment, ni dans la démonstration, ni dans la formule finale.

Remarque. — On pourrait prendre :

$$x_0 = X^t, \quad x_1 = X^{t+1}, \quad \dots, \quad x_{n-1} = X^{t+n-1};$$

tous les éléments de la suite (7) seraient multipliés par X^t et le déterminant Δ serait multiplié par X^{nt}.

IV.

Propriétés générales des formes $\varphi(x^n - 1)$.

18. On appelle *circulant* tout déterminant de la forme

$$A = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_n & \dots & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & \dots & a_4 & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_n \end{vmatrix}.$$

La première ligne est composée d'éléments quelconques ; les autres lignes sont des permutations circulaires de la première, les éléments étant disposés de telle sorte que ceux de la diagonale principale soient égaux entre eux. L'élément de cette diagonale sera appelé *élément diagonal.*

Le déterminant A est symétrique par rapport à la seconde diagonale.

Représentons par (r, s) l'élément qui dans un déterminant appartient à la ligne de rang r et à la colonne de rang s. Un circulant *normal* (*) est alors caractérisé par la relation $(r, s) = (r + 1, s + 1)$, de sorte qu'on a

$$(r, s) = (r + 1, s + 1) = \cdots = (r + t, s + t).$$

On sous-entend ici, et de même plus loin, qu'un indice négatif ou de rang supérieur à n est à remplacer par son résidu positif par rapport à n.

Si l'on échange deux de ses rangées parallèles, le circulant n'a plus sa forme normale.

En effectuant des permutations circulaires sur les colonnes ou les lignes d'un circulant normal, celui-ci conserve la forme normale. On peut de la sorte amener tout élément a_i *à devenir l'élément diagonal.*

En effet, en échangeant la première colonne successivement avec chacune des suivantes, le circulant conserve la forme normale, l'élément diagonal devenant a_{n-1}. La transformation multiplie le circulant par $(-1)^{n-1}$. Opérant de la même manière sur la première colonne du nouveau circulant, et continuant ainsi jusqu'à ce que a_i devienne l'élément diagonal, le déterminant primitif sera multiplié par $(-1)^{(n-1)(n-i)}$. Il garde son signe, à moins que n ne soit pair et i impair.

(*) Plusieurs géomètres adoptent comme forme normale le circulant où la seconde diagonale se compose d'éléments égaux. Le déterminant est alors symétrique par rapport à la diagonale principale.

Pour amener a_i à devenir l'élément diagonal, il suffit d'échanger la première ligne successivement avec chacune des suivantes. Le nouveau circulant sera égal à $(-1)^{n-1}$ A.

On peut également amener a_i à devenir l'élément diagonal en effectuant des permutations circulaires sur les i premières lignes. On trouverait que le nouveau circulant est égal au primitif multiplié par $(-1)^{(n-1)i}$.

Remarque. — Nous représenterons un circulant normal par sa première ligne en doublant la barre de droite, celle de gauche restant simple. Ainsi nous écrirons

$$A = | \; a_n \quad a_{n-1} \quad \ldots \quad a_2 \quad a_1 \; \| \; .$$

19. Concevons une circonférence divisée en n parties égales et supposons qu'aux points de division on inscrive consécutivement les nombres

$$(1) \qquad a_n, \quad a_{n-1}, \quad \ldots, \quad a_2, \quad a_1.$$

Joignons par des droites les sommets pris de m en m du polygone régulier convexe $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1$ en commençant par a_n; si m est premier avec n, on obtient un polygone régulier étoilé.

Ecrivant sur une même droite les lettres qui désignent les sommets successifs du polygone étoilé, on aura la suite

$$(2) \qquad a_n, \quad a_{n-m}, \quad a_{n-2m}, \quad \ldots, \quad a_m,$$

que l'on peut appeler une *permutation étoilée* de (1).

Considérons la suite (2) comme étant la première ligne d'un circulant normal A_1. On a le théorème :

Tout circulant normal A_1 *dont la première ligne se déduit de la première ligne du circulant* A *en prenant les éléments de* m *en* m, *le terme initial restant le même et* m *étant premier à* n, *est égal à* A.

Désignons par C_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) les colonnes successives

du circulant A. Soit A′ le déterminant obtenu en plaçant ces colonnes dans l'ordre

$$C_1,\quad C_{1+m},\quad C_{1+2m},\quad \ldots,\quad C_{1+(n-1)m}.$$

L_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) étant les lignes successives du déterminant A′, soit A″ le déterminant obtenu en plaçant ces lignes dans l'ordre

$$L_1,\quad L_{1+m},\quad L_{1+2m},\quad \ldots,\quad L_{1+(n-1)m}.$$

Le déterminant A″ est numériquement égal à A, car les deux transformations que nous venons d'opérer sur le circulant A le multiplient par la même puissance de — 1. Je dis que A″ est un circulant normal. En effet, en employant la notation des doubles indices [**18**], un élément $(i, k)'$ du déterminant A′ est égal à l'élément $\big(i,\ 1 + (k-1)\ m\big)$ du circulant A. De même, pour un élément $(i, k)''$ du déterminant A″, il vient

$$(i, k)'' = \big(1 + (i-1)m,\ k\big)' = \big(1 + (i-1)m,\ 1 + (k-1)m\big);$$

donc aussi

$$(i + 1,\quad k + 1)'' = (1 + im,\quad 1 + km).$$

Mais [**18**]

$$(r, s) = (r + t, s + t).$$

Si l'on fait

$$r = 1 + (i-1)m,\quad s = 1 + (k-1)m,\quad t = m,$$

on voit que

$$(i, k)'' = (i + 1, k + 1)''.$$

A″ est donc un circulant normal ; et comme les premières

lignes de A_1 et de A'' sont les mêmes, on conclut à l'identité des déterminants A_1 et A''.

Remarque I. — Pour plus de brièveté, nous dirons que l'on *transforme un circulant* A *en prenant ses éléments de* m *en* m. Il doit être entendu par là que, m étant premier avec n, on compose un nouveau circulant normal A_1 dont la première ligne se déduit de la première ligne de A en prenant les éléments de m en m, l'élément initial restant le même.

Remarque II. — Prendre les éléments d'un circulant de $n-1$ en $n-1$, cela revient à renverser l'ordre de ses éléments, l'élément initial restant le même. On a :

$$| a_n\ a_{n-1} \dots a_1 \| = | a_n\ a_1\ a_2 \dots a_{n-1} \| = (-1)^{n-1} | a_1\ a_2 \dots a_n \| .$$

Remarque III. — Un circulant qui se déduit de A par une permutation non étoilée des éléments de la première ligne peut avoir des valeurs différentes de A. Ainsi il est facile de voir que les circulants $| a_4\ a_3\ a_2\ a_1 \|$ et $| a_4\ a_2\ a_3\ a_1 \|$ n'ont pas, en général, la même valeur numérique.

Remarque IV. — En vertu de ce qui précède, un circulant déduit du circulant A par une permutation étoilée des éléments, l'élément initial restant le même, a la même valeur numérique que A. Si l'élément initial change, le circulant peut changer de signe, mais seulement si n est pair.

Remarque V. — Les permutations circulaires peuvent être envisagées comme un cas particulier des permutations étoilées. On peut encore dire que les lignes d'un circulant normal sont des permutations étoilées *directes*, tandis que les colonnes sont des permutations étoilées *inverses*.

Si l'on définit comme circulant normal celui dont la seconde diagonale se compose d'éléments égaux, les lignes et les colonnes sont constituées par des permutations étoilées directes.

20. Considérons une suite récurrente ayant le polynome générateur $f(x) = x^n - 1$. Les termes initiaux étant $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, il vient :

$$x_n = x_0, \quad x_{n+1} = x_1, \quad \ldots, \quad x_{2n} = x_n = x_0, \quad \ldots .$$

On voit que la suite récurrente est

$$x_0, \quad x_1, \quad \ldots, \quad x_{n-1}, \quad x_0, \quad x_1, \quad \ldots, \quad x_{n-1}, \quad x_0, \quad x_1, \quad \ldots .$$

Pour faciliter l'écriture, nous représenterons les termes initiaux par $a_1, a_2, \ldots, a_n$. La forme associée de $f(x)$ sera, dans ces conditions, représentée par le circulant

$$\mathrm{A} = \| \; a_n \quad a_{n-1} \quad \ldots \quad a_2 \quad a_1 \; \| \; .$$

21. Les racines de l'équation

$$x^n - 1 = 0 \tag{3}$$

sont données par

$$\rho^0, \rho^1, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}, \tag{4}$$

où l'on pose

$$\rho = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} .$$

Nous désignons par γ l'une quelconque des racines de la suite (4).

La transformée indiciale de

$$\frac{x^n - 1}{x - \gamma} = \frac{x^n - \gamma^n}{x - \gamma} = x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \gamma^2 x^{n-3} + \cdots + \gamma^{n-1} x^0$$

est, en remplaçant x_k par a_{k+1} $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$,

$$a_n + \gamma a_{n-1} + \gamma^2 a_{n-2} + \cdots + \gamma^{n-1} a_1 .$$

Représentons par $F_0, F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$ l'expression précédente quand on y remplace γ successivement par $\rho^0, \rho^1, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}$; il vient [**14**]

$$A = F_0 F_1 F_2 \ldots F_{n-1}. \tag{5}$$

Rappelons que l'équation (3) n'a que la seule racine réelle $\rho^0 = 1$ si n est impair, et deux racines réelles $\rho^0 = 1$ et $\rho^{\frac{n}{2}} = -1$ si n est pair; les autres racines ρ^h et ρ^{n-h} sont *imaginaires conjuguées deux à deux*, h étant compris entre 0 et n exclusivement et, de plus, différent de $\frac{n}{2}$ si n est pair. Il en résulte que

$$F_0 = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1,$$

et, si n est pair, que

$$F_{\frac{n}{2}} = a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \cdots - a_1.$$

Les autres facteurs F de A sont *imaginaires conjugués deux à deux*.

22. On a la relation

$$A' = \| \; a_n + \alpha, \quad a_{n-1} + \alpha, \quad \ldots, \quad a_1 + \alpha \; \| = A + \frac{n\alpha A}{\Sigma a}.$$

En effet, le circulant A′ est égal à la somme de tous les déterminants qui s'en déduisent en réduisant chaque colonne à sa première ou à sa seconde *file* (*). Si l'on prend les premières files des colonnes, le déterminant résultant est A ; les déterminants obtenus en prenant plus d'une fois une seconde file sont

(*) Lorsque les éléments d'une colonne sont des polynomes de k termes, nous appelons *file* la colonne réduite respectivement à ses premiers, seconds, ..., k^{mes} termes.

nuls; enfin ceux qui ne contiennent qu'une seconde file sont du type

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_{m+1} & \alpha & a_{m-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_n & \cdots & a_{m+2} & \alpha & a_m & \cdots & a_3 & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_m & \alpha & a_{m-2} & \cdots & a_1 & a_n \end{vmatrix}.$$

Or, si à la $(n - m + 1)^{me}$ colonne du circulant A on ajoute toutes les autres colonnes, les éléments de la colonne transformée seront tous égaux à Σa; en mettant Σa en évidence, on aura précisément le déterminant (6) où l'on aurait mis α en évidence. On a donc bien l'égalité

$$A' = A + \frac{n\alpha A}{\Sigma a}.$$

On peut encore arriver autrement à cette relation.
L'égalité (5) devient pour le circulant A'

$$A' = F'_0 F'_1 \cdots F'_{n-1},$$

où l'on a [**21**]

$$\begin{aligned} F'_0 &= a_n + \alpha + a_{n-1} + \alpha + \cdots + a_1 + \alpha = F_0 + n\alpha, \\ F'_i &= a_n + \alpha + (a_{n-1} + \alpha)\rho^i + \cdots + (a_1 + \alpha)\rho^{(n-1)i} \\ &= a_n + a_{n-1}\rho^i + \cdots + a_1\rho^{(n-1)i} + \alpha(1 + \rho^i + \cdots + \rho^{(n-1)i}) \\ &= F_i. \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \end{aligned}$$

Donc

$$A' = (F_0 + n\alpha)F_1F_2 \ldots F_{n-1} = A + \frac{n\alpha A}{\Sigma a}.$$

23. Examinons dans quelles conditions le circulant d'ordre n, $Q = \| b\ a\ a \ldots a \|$ peut être égal à l'unité pour des valeurs entières de a et de b.

Ajoutons $-a$ aux éléments du circulant Q. On obtient le circulant $\| b-a\ o\ o \ldots o \|$, qui est égal à [**22**]

$$Q - \frac{naQ}{(n-1)a+b};$$

mais il est aussi égal à $(b-a)^n$. On en conclut que

$$Q = (b-a)^{n-1}[(n-1)a+b]. \tag{7}$$

Cette relation peut encore s'établir autrement.

On a [**21**]

$$Q = F_0F_1F_2 \ldots F_{n-1},$$

où

$$\begin{aligned} F_0 &= b + a + a + \cdots + a = (n-1)a + b, \\ F_i &= b + a\rho^i + a\rho^{2i} + \cdots + a\rho^{(n-1)i} \\ &= b - a + a(1 + \rho^i + \rho^{2i} + \cdots + \rho^{(n-1)i}) \\ &= b - a. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \end{aligned}$$

On retrouve donc la relation (7).

Cette expression de Q ne peut être égale à l'unité, pour des valeurs entières de a et de b, que si la valeur numérique de $b-a$ et de $(n-1)\,a+b$ est l'unité.

En convenant de combiner dans les formules ci-après respectivement les signes supérieurs et les signes inférieurs, il vient, si n est pair et que $Q = +1$,

$$\begin{aligned} b - a &= \pm 1, \\ (n-1)a + b &= \pm 1. \end{aligned} \tag{8}$$

Il s'ensuit que $na = 0$. Donc $a = 0$, $b = \pm 1$.

Si $Q = -1$, n étant pair, on combinera la relation (8) avec

$$(n-1)a + b = \mp 1.$$

On en déduit que $na = \mp 2$. Le problème n'admet de solution que si $n = 2$. Il vient alors $a = \mp 1$, $b = 0$.

Si n est impair et que $Q = +1$, l'égalité (8) est à combiner avec

$$(n-1)a + b = +1.$$

Si l'on prend dans le second membre de l'égalité (8) le signe $+$, il vient $a = 0$, $b = +1$; si l'on prend dans le second membre de l'égalité (8) le signe $-$, on déduit de $na = 2$ la solution $a = 2$, $b = 1$, $n = 1$, laquelle est évidemment à rejeter.

On peut se dispenser d'examiner le cas où $Q = -1$, n étant impair; en effet, le signe du circulant Q changeant avec celui de ses éléments, on déduit des résultats précédents que la valeur $Q = -1$ correspond à $a = 0$, $b = -1$.

24. Le circulant d'ordre n

$$C = \| \; a \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0 \;\; b \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0 \; \|,$$

dans lequel l'élément b occupe le $(s+1)^{\text{me}}$ rang, est égal au produit des n facteurs

$$\begin{aligned} C = \; & (a + \rho^s b)(a + \rho^{2s} b) \ldots (a + \rho^{ns} b) \\ = \; & b^n \left(\frac{a}{b} + \rho^s\right)\left(\frac{a}{b} + \rho^{2s}\right) \cdots \left(\frac{a}{b} + \rho^{ns}\right). \end{aligned}$$

Posant $\frac{a}{b} = -y$, il vient,

$$C = b^n (-1)^n (y - \rho^s)(y - \rho^{2s}) \ldots (y - \rho^{ns}).$$

Si s est premier à n, les quantités

$$\rho^s, \; \rho^{2s}, \; \ldots, \; \rho^{ns} \tag{9}$$

sont distinctes et égales aux racines de l'équation (3).

Par suite

$$C = (-1)^n b^n (y^n - 1) = a^n - (-b)^n.$$

s est toujours premier à n s'il est égal à l'unité, c'est-à-dire si $C = | a\ b\ 0\ \dots\ 0 \|$. Dans ce cas on arriverait encore au même résultat en développant le circulant C suivant les éléments de la première colonne.

Si s n'est pas premier à n, les quantités (9) ne sont plus distinctes. Soit alors

$$s = s'\sigma, \quad n = n'\sigma,$$

σ étant le p. g. c. d. des nombres s et n. En écrivant les quantités (9) sous la forme

$$\rho^{s'\sigma}, \quad \rho^{2s'\sigma}, \quad \dots, \quad \rho^{ns'\sigma},$$

on constate qu'elles forment une suite périodique. Jusqu'à $\rho^{n's'\sigma} = \rho^{ns'} = 1$, ces quantités sont distinctes, mais ensuite on retrouve les termes précédents. La période comprend n' termes et le nombre de périodes est de $\frac{n}{n'} = \sigma$. Donc

$$C = (-1)^n b^n [(y - \rho^s)(y - \rho^{2s}) \dots (y - \rho^{n's})]^\sigma.$$

Or $\rho^s, \rho^{2s}, \dots, \rho^{n's}$ sont les n' racines de l'équation $y^{n'} - 1 = 0$, puisque $(\rho^s)^{n'} = \rho^{n's'\sigma} = 1$; donc

$$C = (-1)^n b^n (y^{n'} - 1)^\sigma = (-1)^n [(-a)^{n'} - b^{n'}]^\sigma = [a^{n'} - (-b)^{n'}]^\sigma.$$

25. *Soit le circulant*

$$Q = | 1\ 1\ \dots\ 1\ 0\ \dots\ 0 \|,$$

la première ligne comprenant β *éléments* 1 *et* $n - \beta$ *éléments* 0. *Je dis qu'il est égal à* β *ou à zéro, suivant que* β *est ou non premier à* n.

En effet Q est égal au produit de n facteurs F_i, dont l'un, F_0, est égal à la somme β des éléments d'une ligne, les autres sont de la forme

$$1 + \rho^i + \rho^{2i} + \cdots + \rho^{(\beta-1)i} = \frac{\rho^{\beta i} - 1}{\rho^i - 1}; (i = 1, 2, \ldots, n-1);$$

donc

$$(10) \qquad Q = \beta \frac{\rho^\beta - 1}{\rho - 1} \frac{\rho^{2\beta} - 1}{\rho^2 - 1} \cdots \frac{\rho^{(n-1)\beta} - 1}{\rho^{n-1} - 1}.$$

Si β est premier à n, les résidus suivant n des nombres $\beta, 2\beta, \ldots, (n-1)\beta$ reproduisent les nombres $1, 2, \ldots, n-1$ à l'ordre près; par suite, les numérateurs des fractions du second membre de l'égalité (10) reproduisent, à l'ordre près, les dénominateurs, et l'on a $Q = \beta$.

Si β et n ont un facteur commun ζ, soit $\beta = \beta'\zeta$; $n = n'\zeta$. Dans le second membre de l'égalité (10) se trouve

$$\frac{\rho^{n'\beta} - 1}{\rho^{n'} - 1} = \frac{\rho^{n'\beta'\zeta} - 1}{\rho^{n'} - 1} = \frac{\rho^{n\beta'} - 1}{\rho^{n'} - 1}.$$

Or ρ est une racine de l'équation $x^{n\beta'} - 1 = 0$, sans être racine de l'équation $x^{n'} - 1 = 0$. Donc $Q = 0$.

Remarque. — Si β est premier à n, on a

$$F_0 = \beta, \quad F_1 F_2 \ldots F_{n-1} = 1.$$

Donc $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$ sont des unités complexes. [**12**, Rem.].

26. *Le circulant d'ordre* n

$$(11) \qquad Q = \| \, 0 \;\; 1 \;\; 1 \;\; \ldots \;\; 1 \;\; 2 \, \|$$

est égal à $(-1)^{n+1} n^2$.

Considérons les circulants

$$C = \| \, 0 \;\; 1 \;\; 1 \;\; \ldots \;\; 1 \;\; 1+y \, \|,$$
$$C' = \| \, -1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0 \;\; y \, \|.$$

En prenant dans le circulant C′ les éléments de $n-1$ en $n-1$ [**19**, Rem. I], on obtient le circulant

$$| \; -1 \;\; y \;\; 0 \;\; \dots \;\; 0 \; \|,$$

dont la valeur est [**24**]

$$C' = (-1)^n - (-y)^n = (-1)^{n+1}(y^n - 1).$$

Mais [**22**]

$$C = C' + \frac{nC'}{y-1} = C'\left(\frac{y-1+n}{y-1}\right)$$
$$= (-1)^{n+1}(y^{n-1} + y^{n-2} + \dots + y + 1)(y - 1 + n).$$

Pour $y = 1$, il vient

$$C = Q = (-1)^{n+1}n^2.$$

On peut encore établir cette relation en posant

$$\begin{aligned} Q &= F_0 F_1 \dots F_{n-1}, \\ F_0 &= n, \\ F_i &= \rho^i + \rho^{2i} + \dots + \rho^{(n-2)i} + 2\rho^{(n-1)i} \\ &= (1 + \rho^i + \dots + \rho^{(n-1)i}) + \rho^{(n-1)i} - 1 \\ &= \frac{1}{\rho^i} - 1 \qquad (i = 1, 2, \dots, n-1). \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$Q = n\left(\frac{1}{\rho} - 1\right)\left(\frac{1}{\rho^2} - 1\right)\dots\left(\frac{1}{\rho^{n-1}} - 1\right).$$

Considérons la fonction

$$\xi(z) = \left(\frac{1}{\rho^0} - z\right)\left(\frac{1}{\rho^1} - z\right)\dots\left(\frac{1}{\rho^{n-1}} - z\right).$$

Comme $\frac{1}{\rho^0}, \frac{1}{\rho^1}, \ldots, \frac{1}{\rho^{n-1}}$ représentent également les racines de l'équation (3), on a

$$\xi(z) = (-1)^n (z^n - 1),$$
$$\frac{\xi(z)}{1-z} = (-1)^{n-1}(z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots z + 1).$$

Or $\frac{Q}{n}$ est la valeur de $\frac{\xi(z)}{1-z}$ pour $z = 1$, donc

$$\frac{Q}{n} = (-1)^{n-1} n.$$

Remarque I. — Si aux éléments du circulant (11) on oute $n^\alpha - 1$, on a [**22**]

$$(-1)^{n+1} n^{\alpha+2} = | n^\alpha - 1 \;\; n^\alpha \;\; n^\alpha \;\; \ldots \;\; n^\alpha \;\; n^\alpha + 1 \| .$$

Remarque II. — Le produit des facteurs $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$ de Q est égal à n. Si n est premier, $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$ sont des nombres premiers complexes; dégagés des unités complexes, ils sont égaux entre eux; en effet, on a

$$\rho^i - 1 = (\rho - 1)(\rho^{i-1} + \rho^{i-2} + \cdots + \rho + 1), \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et, ainsi qu'on l'a vu [**25**, Rem.], $1 + \rho + \ldots + \rho^{i-1}$ est une unité complexe, car, si n est premier, i est premier à n.

Remarque III. — Une observation déjà faite par Kummer (*) complétera la remarque précédente. Il ne s'agira jamais de chercher quels facteurs de n, mais seulement combien de ces facteurs, sont contenus dans un nombre complexe donné.

(*) E.-E. Kummer, Mémoire sur la théorie des nombres complexes composés de racines de l'unité et de nombres entiers. (*Journ. de Liouville*, t. XVI (1851), p. 377.)

On peut encore dire, si n est premier, que $n = \varepsilon\,(\rho - 1)^{n-1}$, ε étant une unité complexe.

27. — Dans la suite nous rencontrerons des circulants d'ordre impair $n = 2n' + 1$ tels que

$$(12) \qquad \| a_{n'} \; a_{n'-1} \; \dots \; a_1 \; a_0 \; a_1 \; \dots \; a_{n'-1} \; a_{n'} \|,$$

dont les éléments sont disposés symétriquement autour d'un même élément a_0. Nous dirons que ces circulants sont symétriques, l'élément a_0 étant un axe de symétrie.

Si l'on prolonge indéfiniment la suite récurrente de loi $x^n - 1$ dont les n termes initiaux sont constitués par la première ligne du circulant (12), il vient

$$a_{n'} \; a_{n'-1} \; \dots \; a_1 \; a_0 \; a_1 \; \dots \; a_{n'-1} \; a_{n'} \; a_{n'} \; a_{n'-1} \; \dots \; a_1 \; a_0 \; a_1 \; \dots .$$

Les éléments de cette suite peuvent être considérés comme étant groupés symétriquement autour des deux éléments consécutifs $a_{n'}\; a_{n'}$. Il s'ensuit qu'il existe pour le circulant (12) un second axe de symétrie qui tombe entre les éléments consécutifs $a_{n'}\; a_{n'}$.

On peut de même envisager des circulants symétriques d'ordre pair $n = 2n'$ tels que

$$(13) \qquad \| a_{n'} \; a_{n'-1} \; \dots \; a_1 \; a_1 \; \dots \; a_{n'-1} \; a_{n'} \|,$$

$$(14) \qquad \| a_{n'} \; a_{n'-1} \; \dots \; a_1 \; a_0 \; a_1 \; \dots \; a_{n'-2} \; a_{n'-1} \|.$$

Si l'on prolonge la suite récurrente de loi $x^n - 1$ dont les n termes initiaux sont constitués par la première ligne du circulant (13), il vient

$$a_{n'} \; a_{n'-1} \; \dots \; a_1 \; a_1 \; \dots \; a_{n'-1} \; a_{n'} \; a_{n'} \; a_{n'-1} \; \dots \; a_1 \; a_1 \; \dots$$

Les termes de cette suite sont groupés symétriquement autour des termes $a_1\; a_1$ et $a_{n'}\; a_{n'}$. Le circulant (13) présente

donc deux axes de symétrie qui tombent respectivement entre les éléments consécutifs $a_1\ a_1$ et $a_{n'}\ a_{n'}$.

En procédant de la même façon pour le circulant (14) on verrait que les éléments a_0 et $a_{n'}$ constituent des axes de symétrie.

Remarque. — Les circulants déduits d'un circulant symétrique d'ordre n en prenant les éléments de m en m, m étant premier à n [**19**, Rem. I], sont aussi symétriques.

Un circulant symétrique ne change pas si, conservant l'axe de symétrie, on renverse l'ordre de ses éléments.

V.

Sur les congruences $\varphi(f) \equiv 0 \pmod{p}$ (*).

28. Comme nous ne considérons dans ce chapitre que des suites récurrentes, dont tous les termes sont des nombres entiers, nous supposerons que tous les coefficients du polynome générateur

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_nx^0$$

sont des nombres entiers. Si le coefficient de x^n était le nombre a_0 différent de l'unité, on remplacerait $f(x)$ par $\alpha f(x)$, α étant l'associé de a_0 pour le module *premier* p que nous allons envisager, de sorte que $a_0{}^\alpha \equiv 1 \pmod{p}$.

Soit

(1) $$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

une suite récurrente de loi $f(x)$. Formons la suite

(2) $$x'_0,\ x'_1,\ x'_2,\ \ldots,\ x'_n,\ \ldots,$$

(*) Pour ce chapitre, nous avons consulté surtout J.-A. Serret, *Cours d'algèbre supérieure*, t. II, 3e édition. Paris, 1866.

dont les termes sont congrus respectivement aux termes correspondants de (1) suivant le module p. Nous convenons de dire que les *suites congrues* (1) *et* (2) *obéissent, suivant le module* p, *à la loi de récurrence* f(x).

Dans l'étude de la congruence $\varphi(f) \equiv 0 \pmod{p}$, la suite (2) peut être substituée à la suite (1). Nous supposons même les termes de (2) compris entre 0 et $p - 1$.

$a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ étant des nombres congrus à $a_1, a_2, \ldots, a_n$ suivant le module p, on peut encore dire que les suites (1) et (2) admettent (mod. p) le polynome générateur

$$x^n + a'_1 x^{n-1} + a'_2 x^{n-2} + \ldots + a'_n x^0.$$

On remarquera que l'on substitue ainsi à $f(x)$ un polynome de la forme $f(x) - p\xi(x)$. Cette substitution a souvent l'avantage de permettre la décomposition du polynome générateur en facteurs. Soit, par exemple,

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 9x - 5.$$

On a

$$f(x) \equiv x^3 + x^2 - 3x + 1 = (x - 1)(x^2 + 2x - 1) \pmod{3}$$
$$\equiv x^3 - 2x^2 - 61x - 18 = (x - 9)(x^2 + 7x + 2) \pmod{13}.$$

Toute suite qui admettrait (mod. 3) le polynome générateur $x^2 + 2x - 1$ admettrait aussi le générateur $f(x) = x^3 - 2x^2 - 9x - 5$.

Si, parmi les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$, il y en a qui sont divisibles par p, on supprimerait de $f(x)$ les termes correspondants. On suppose donc a_n incongru à zéro (mod. p).

29. S'il existe un polynome $\xi(x)$ tel que $f(x) - p\xi(x)$ soit décomposable en facteurs rationnels $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots$, on dit que f(x) *est divisible par les fonctions* $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots$, *suivant le module* p (*).

(*) J.-A. Serret, *loc. cit.*, § 340, p. 121.

Il peut arriver qu'il n'existe pas de polynome $\xi(x)$ tel que $f(x) - p\xi(x)$ admette des diviseurs rationnels; dans ce cas, la fonction $f(x)$ est dite *irréductible* (mod. p), ou *fonction première* (mod. p). Il est évident qu'alors la congruence

$$f(x) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

n'admet pas de racine entière, car, si elle admettait la racine entière r, on pourrait assimiler $x - r$ à l'un des facteurs $\psi(x)$.

La décomposition de $f(x) - p\xi(x)$ en facteurs irréductibles est unique en ce sens que les facteurs d'une seconde décomposition sont respectivement congrus à ceux de la première (mod. p) (*).

30. Pour les raisons déjà exposées [**10**], on peut étendre aux suites récurrentes, suivant un module premier p, certains résultats établis précédemment pour les suites récurrentes ordinaires.

Ainsi, on a le théorème suivant analogue à celui du n° **2** : *Une suite récurrente qui admet* (*mod.* p) *le polynome générateur* f(x) *admet aussi le polynome* g(x) *divisible par* f(x) (*mod.* p).

On peut démontrer directement cette proposition. En effet, soit

$$g(x) = f(x)h(x) + pf_2(x).$$

La suite récurrente (1), obéissant à la loi $f(x)$, admettra aussi (mod. p) le polynome générateur $f(x)h(x)$. Or, si $g_1(x)$ représente ce produit effectué, les coefficients de $g(x)$ ne diffèrent de ceux de $g_1(x)$ que par des multiples de p; donc [**28**] la suite primitive (1), ou encore toute suite congrue à celle-ci (mod. p), obéit aussi à la loi $g(x)$ (mod. p).

Si une suite récurrente admet le polynome générateur $f(x)$ de degré n sans admettre de générateur d'un degré inférieur

---

(*) J.-A. Serret, *loc. cit.*, § 343, p. 125.

(mod. p), nous dirons qu'elle *obéit à une loi de récurrence irréductible* (mod. p.), ou encore qu'elle est de *rang* n (mod. p) [**2**].

Il est d'autres théorèmes dont la démonstration découle immédiatement de celles qui ont été développées précédemment. Nous nous contenterons de les énoncer. Les propositions suivantes se déduisent :

a) Du n° 3. *Si une suite récurrente admet* (*mod.* p) *comme générateur deux polynomes* $f(x)$ *et* $f_1(x)$, *elle admet aussi comme générateur leur p. g. c. d.* (*mod.* p) (*).

b) Du n° 6. *Si* $n + r$ *termes consécutifs d'une suite récurrente obéissant* (*mod.* p) *à une loi* $f_1(x)$ *de degré* r *sont respectivement congrus* (*mod.* p) *à* $n + r$ *termes consécutifs d'une suite récurrente de loi* $f(x)$ *de degré* n, *les deux suites sont congrues* (*mod.* p) *dans toute leur étendue.*

c) Du n° 7. Le *rang* d'un déterminant (mod. p) étant l'ordre de ses mineurs incongrus à zéro (mod. p) de l'ordre le plus élevé, *le déterminant*

$$\| x_{n'} \quad x_{n'-1} \quad \dots \quad x_0 \| ,$$

où $n' \geqq n - 1$, *est de même rang* (*mod.* p) *que la suite récurrente* (1) *dont il procède.*

31. Nous dirons qu'un système de valeurs déterminées

$$(3) \qquad c_0, \quad c_1, \quad \dots \quad c_{n-1}$$

constitue un *système de racines*, ou une *solution*, de la congruence

$$(4) \qquad \varphi(f) \equiv 0 \pmod{p},$$

lorsque ces valeurs, substituées respectivement aux n variables $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ de $\varphi(f)$, satisfont à la dite congruence.

(*) Pour le procédé de recherche de ce p. g. c. d., cf. J.-A. SERRET, *loc. cit.*, § 341, p. 122.

Considérons les n valeurs (3) comme les termes initiaux d'une suite récurrente (c) ayant $f(x)$ comme polynome générateur, et désignons par $c_n, c_{n+1}, \ldots$, les termes ultérieurs de la suite. On aura [**14**] pour le module p.

$$\varphi(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}) = \| c_{n-1} \quad c_{n-2} \quad \ldots \quad c_0 \| \equiv 0.$$

Mais on a aussi [**7**, Rem. I]

$$= c_n \quad c_{n-1} \quad \ldots \quad c_1 \| = (-1)^n a_n \| c_{n-1} \quad c_{n-2} \quad \ldots \quad c_0 \| ;$$

donc

$$\varphi(c_1, c_2, \ldots, c_n) = (-1)^n a_n \varphi(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}) \equiv 0;$$

et, plus généralement, pour $\nu \geqq n-1$,

$$\varphi(c_{\nu-n+1}, c_{\nu-n+2}, \ldots, c_\nu) = (-1)^{(n\nu+1)} a_n^{\nu-n+1} \varphi(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}) \equiv 0.$$

On en conclut que n termes consécutifs quelconques de la suite (c) constituent également une solution de la congruence (4). La même chose peut se dire de n termes consécutifs de toute suite dont les termes sont respectivement congrus (mod. p) à ceux de la suite (c).

32. La congruence (4) peut se remplacer par la suivante :

$$\varphi(f) = \Delta_{n-1} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p),$$

Δ_{n-1} étant le déterminant récurrent défini précédemment [**14**, Rem. I]. Si ce déterminant est congru à zéro (mod. p), son rang (mod. p) est $\leqq n-1$. Donc [**30**, c] la suite récurrente (c) obéit alors (mod. p) à une loi irréductible de degré $\leqq n-1$. On en conclut que *pour que la congruence* (4) *ait des solutions, il faut et il suffit que* f(x) *soit réductible* (*mod.* p).

Si $f(x)$ est une fonction première (mod. p) [**29**], la congruence (4) n'admet pas de solution.

33. Le polynome $f(x)$ étant réductible (mod. p), soit

$$\psi(x) = x^r + b_1 x^{r-1} + b_2 x^{r-2} + \cdots + b_r x^0$$

un de ses facteurs (mod. p) de degré $r < n$. Prenons arbitrairement les valeurs $c_0, c_1, \ldots, c_{r-1}$, et considérons-les comme les termes initiaux d'une suite récurrente dont le polynome générateur serait $\psi(x)$. Je dis que dans ce cas

$$\varphi(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}) = \| c_{n-1} \quad c_{n-2} \quad \cdots \quad c_0 \|$$

est divisible par p^{n-r}. En effet, à la s^{me} colonne ($s = 1, 2, \ldots, n - r$) du déterminant $\| c_{n-1} \, c_{n-2} \ldots c_0 \|$ ajoutons les suivantes multipliées respectivement par $b_1, b_2, \ldots, b_r$. Les $n - r$ premières colonnes du déterminant transformé sont divisibles par p ; ce qui démontre la proposition.

Il se peut du reste que le déterminant soit divisible par une puissance de p supérieure à la $(n - r)^{\text{me}}$.

Remarque I. — On peut encore dire que *si la suite* (c) *est de rang* r (*mod.* p) [**30**], *le déterminant récurrent* $\| c_{n-1} \, c_{n-2} \ldots c_0 \|$ *est divisible par* p^{n-r}.

Remarque II. — Si $\varphi(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$ est divisible par p à la première puissance seulement, la suite (2) est de rang $n - 1$ pour le module p.

34. — On rapprochera la démonstration développée au numéro précédent de celle du n° 11 : comme cette dernière, elle est évidemment extensible au cas où l'on remplace le module premier p par un module composé m. On a donc le théorème : *Pour qu'un système de valeurs constitue une solution de la congruence* $\varphi(f) \equiv 0$ (*mod.* m^{n-r}), *il suffit que ces valeurs soient* (*mod.* m) *les termes consécutifs d'une suite récurrente dont le polynome générateur est d'un degré* $r < n$ *et divise* f(x) (*mod.* m).

Mais si cette condition est *suffisante*, elle n'est pas *nécessaire* lorsque le module est composé. Ainsi soit

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 9x - 5.$$

La congruence $\varphi(f) \equiv 0 \pmod{39}$ admet la solution 13, 28, 25 (mod. 39). On vérifie que la suite

$$13,\ 28,\ 25,\ 16,\ 7,\ 10,\ \ldots$$

obéit à la loi de récurrence

$$9x^2 + 24x + 18 \pmod{39}. \tag{5}$$

Celle-ci ne divise pas $f(x)$ (mod. 39), puisqu'on a la seule décomposition

$$x^3 - 2x^2 - 9x - 5 \equiv (x - 22)(x^2 + 20x + 2) \pmod{39}.$$

On a vu [**28**] quelles sont les décompositions du polynome $x^3 - 2x^2 - 9x - 5$ pour les modules 3 et 13 divisant 39.

On remarquera que le trinome (5) est identiquement congru à zéro (mod. 3) et que, multiplié par 3, il devient $x^2 + 7x + 2$ (mod. 13).

35. — En définitive, la détermination de toutes les solutions de la congruence (4) nécessite la connaissance de la décomposition du polynome $f(x)$ en ses facteurs irréductibles (mod. p).

Si, pour des valeurs déterminées des n variables, la forme $\varphi(f)$ prend la valeur N, on conclura que le polynome $f(x)$ est réductible pour tout module premier p divisant N. Le degré d auquel N contient p donne une limite inférieure du degré $n - d$ de la fonction $\psi(x)$ qui divise $f(x)$ (mod. p). L'étude de la suite récurrente fondamentale de loi $f(x)$ donne d'autres indications concernant le nombre et le degré des diviseurs de $f(x)$ (mod. p). Mais, si les formules résultantes sont simples, les grandeurs qu'elles renferment ne peuvent se déterminer qu'au prix de

calculs numériques interminables. Cette difficulté se présente du reste déjà si l'on veut calculer la valeur numérique de $N = \varphi(f)$ dans un cas déterminé.

VI.

Sur les congruences $\varphi(x^n - 1) \equiv 0 \pmod{p}$.

36. Pour que le circulant $A = \| a_n a_{n-1} \dots a_1 \|$ soit divisible par un nombre premier p, il faut et il suffit [**32**] que la suite

$$(1) \qquad a_1, \ a_2, \ \dots, \ a_{n-1}, \ a_n, \ a_1, \ a_2, \ \dots$$

obéisse (mod. p) à une loi de récurrence $\psi(x)$ divisant le binôme $x^n - 1$ (mod. p) et d'un degré n_1 moindre que n.

Nous dirons, pour la brièveté du langage, que *le circulant* A, et même, plus simplement, que A *obéit à la loi* $\psi(x)$ (*mod.* p).

Si l'on renverse l'ordre des termes de la suite (1), la nouvelle suite obéit à la loi de récurrence $x^{n_1}\psi(x^{-1})$. Nous dirons que les deux lois $\psi(x)$ et $x^{n_1}\psi(x^{-1})$ sont *inverses* l'une de l'autre.

Un circulant symétrique ne change pas si, conservant l'axe de symétrie, on renverse l'ordre de ses éléments [**27**]. Il obéit donc, pour tout module premier qui le divise, à la fois à une loi de récurrence $\psi(x)$ et à son inverse.

On remarquera que la réciproque n'est pas vraie. Ainsi, pour le module 11, on a

$$x^5 - 1 \equiv (x-1)(x-3)(x-4)(x-5)(x-9).$$

Le circulant *non symétrique* $11^3 = | 3, -2, 4, -4, 0 \|$ obéit à la loi de récurrence irréductible $x^3 - 8x^2 - 3x - 1 \equiv (x-1)(x-3)(x-4) \pmod{11}$ et aussi à l'inverse de cette loi, vu que les deux lois inverses l'une de l'autre se confondent ici.

37. Supposons que le module premier p soit de la forme $p \equiv 1 \pmod{n}$. En ce cas la congruence

$$x^n - 1 \equiv 0 \pmod{p} \qquad (2)$$

a n racines réelles distinctes (*) $r_1, r_2, \ldots, r_n$, que l'on peut encore représenter par $r^0, r^1, r^2, \ldots, r^{n-1}$ si r est une racine primitive de la congruence (2).

On peut envisager les développements du n° 14 au point de vue des congruences (mod. p).

La transformée indiciale (mod. p) de

$$\frac{x^n - 1}{x - r} \equiv \frac{x^n - r^n}{x - r} \equiv x^{n-1} + rx^{n-2} + r^2x^{n-3} + \cdots r^{n-1}x^0$$

est, en remplaçant x_i par a_{i+1} $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ [**20**],

$$a_n + ra_{n-1} + r^2a_{n-2} + \ldots + r^{n-1}a_1 \pmod{p}.$$

Représentons par $\mathfrak{f}_0, \mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_{n-1}$ l'expression précédente quand on y remplace r successivement par $r^0, r^1, r^2, \ldots, r^{n-1}$. Il vient [**21**]

$$A \equiv \mathfrak{f}_0\,\mathfrak{f}_1 \cdots \mathfrak{f}_{n-1} \pmod{p}.$$

Nous dirons que $\mathfrak{f}_0, \mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_{n-1}$ sont les *facteurs* $\mathfrak{f}$ *du circulant* A (mod. p) [**12**].

On remarquera que, pour le module p,

$$\mathfrak{f}_0 \equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 = F_0,$$

F_0 ayant été défini au n° **21**.

(*) En effet, n étant un diviseur de $p - 1$, le binôme $x^n - 1$ est diviseur algébrique du binôme $x^{p-1} - 1$, lequel a (mod. p) $p - 1$ racines. Donc la congruence (2) a n racines.

Si A est divisible par p à la première puissance seulement, la suite (1) obéit (mod. p) à une loi de récurrence irréductible de degré $n-1$, car si la loi irréductible était (mod. p) d'un degré moindre que $n-1$, A serait divisible par une puissance de p supérieure à la première [**33**, Remarque II]. Soit

$$\frac{x^n-1}{x-r^i} \pmod{p} \tag{3}$$

cette loi; sa transformée indiciale étant congrue à zéro (mod. p), on conclut que $\mathfrak{F}_i \equiv 0 \pmod{p}$. C'est du reste le seul facteur $\mathfrak{F}$ de A qui soit congru à zéro (mod. p), car si l'on avait $\mathfrak{F}_k \equiv 0 \pmod{p}$, il en résulterait que la suite (1) obéit à la loi de récurrence

$$\frac{x^n-1}{x-r^k} \pmod{p}. \tag{4}$$

Mais alors la suite (1) obéirait (mod. p) à une loi de récurrence qui serait le p. g. c. d. (mod. p) des polynomes (3) et (4), [**30**, a], donc à une loi de récurrence de degré $< n-1$, ce qui est impossible.

Remarque. — Si $A = p$ et que $F_0 = 1$, les facteurs $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$ définis au n° 21 sont les $n-1$ facteurs premiers complexes de p. Leur *norme*, c'est-à-dire le produit $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$ est égale à p.

Il n'existe pas toujours de circulant égal à p. Cependant Kummer (*) admet dans ce cas l'existence de $n-1$ *facteurs premiers idéaux* dont le produit est égal à p. Nous dirons, par analogie, qu'à un facteur premier idéal de p correspond un *circulant idéal*.

38. Le module premier p étant encore de la forme $p \equiv 1 \pmod{n}$, supposons que la suite (1) soit (mod. p) de rang d [**30**].

(*) E.-E. Kummer, *loc. cit.*

La loi de récurrence irréductible à laquelle elle obéit pourra s'exprimer par

$$\frac{x^n - 1}{(x - r^i)(x - r^k)\dots(x - r^l)} \pmod{p},$$

les racines $r^i, r^k, \dots, r^l$ étant au nombre de $n - d$. La suite récurrente (1) admettra aussi (mod. p) les polynomes générateurs obtenus en divisant $x^n - 1$ respectivement par $x - r^i$, $x - r^k, \dots, x - r^l$. On en conclut que

$$\mathfrak{F}_i \equiv \mathfrak{F}_k \equiv \dots \equiv \mathfrak{F}_l \equiv 0 \pmod{p}.$$

Donc le rang d du circulant A, suivant le module p, détermine aussi le nombre $n - d$ de ses facteurs $\mathfrak{F}$ qui sont congrus à zéro (mod. p). Inversement, si $n - d$ facteurs $\mathfrak{F}$ de A sont congrus à zéro (mod. p), le circulant A est (mod. p) de rang d. En effet, la suite récurrente (1) admet alors comme générateur (mod. p) chacun des polynomes correspondant à l'un de ces $n - d$ facteurs $\mathfrak{F}$, donc aussi leur p. g. c. d. qui est de degré d, puisque les racines $r^0, r^1, r^2, \dots, r^{n-1}$ sont toutes distinctes. On rapprochera ces conclusions de la Remarque I du n° 14.

39. Supposons ensuite que pour le module premier p la congruence

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots x^0 \equiv 0 \pmod{p}$$

soit décomposable en s facteurs irréductibles de degré $d > 1$, de sorte que $n - 1 = sd$. Si la suite (1) est (mod. p) de rang $n - d$, le déterminant A sera divisible par p^d [**33**, Rem. I].

En particulier, si $A = p^d$, et que $F_0 = 1$, les facteurs F_1, $F_2, \dots, F_{n-1}$ de A sont des nombres complexes premiers. On peut démontrer que ces facteurs peuvent être combinés s par s de façon que leur produit soit égal à p. Comme nous ne ferons pas usage de cette proposition, nous renonçons à l'établir; au surplus, la démonstration n'en est aisée que si l'on a recours

aux imaginaires de Galois, dont nous préférons éviter l'emploi.

On sait que Kummer est arrivé à des résultats analogues par des voies différentes (*).

40. n étant premier, supposons que le circulant A soit divisible par n après que ses éléments ont été débarrassés, s'il y a lieu, du facteur commun n^k. On détermine aisément à quelle puissance n divise le facteur F_0. Pour savoir à quel degré n divise A, il reste à déterminer à quelle puissance θ l'un des facteurs F_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, par exemple F_1, contient $\rho - 1$, ρ ayant la signification définie au n° 21; car il est évident que F_i $(i = 2, 3, \ldots, n-1)$ contient autant de fois $\rho^i - 1$ que F_1 contient de fois $\rho - 1$. Ceci est du reste conforme à une remarque précédente [**26**, Rem. III].

Remarquons que F_1 peut contenir au plus $n-1$ fois le facteur $\rho - 1$; en effet, F_1 est une fonction de degré $n-1$ au plus en ρ, et ses coefficients numériques, par hypothèse, ne sont pas tous divisibles par n; or, si F_1 était divisible par $(\rho - 1)^n$, tous ses coefficients seraient divisibles par n, ainsi qu'il ressort immédiatement du développement de $(\rho - 1)^n$.

Pour que F_1 soit divisible par $\rho - 1$ à la puissance θ au plus, il faut et il suffit, en tenant compte de la relation $n = \varepsilon(\rho - 1)^{n-1}$ [**26**, Rem. III], que cette fonction et ses dérivées par rapport à ρ, jusqu'à celle d'ordre θ exclusivement, soient divisibles par $\rho - 1$. Or les indications fournies par ce critérium ne sont modifiées en rien si l'on ajoute à F_1 un ou plusieurs termes $Cn^{\eta}\rho^{\eta'}$ où C est une constante numérique, et où η et η' sont des entiers positifs, η seul étant astreint à la condition d'être plus grand que zéro. Mais alors le critérium que nous venons d'énoncer peut se remplacer par le suivant : Pour que F_1 soit divisible par $\rho - 1$ à la puissance θ au plus, il faut et il suffit que cette fonction et ses dérivées par rapport à ρ jusqu'à celle d'ordre θ exclusivement soient congrues à zéro (mod. n) pour $\rho = 1$.

(*) E.-E. Kummer, *loc. cit.*

Ce critérium peut se transformer.
De ce que

$$x^n - 1 \equiv (x-1)^n \pmod{n},$$

il résulte que la congruence $x^n - 1 \equiv 0 \pmod{n}$ a n racines réelles. On peut donc, comme dans le n° 37, considérer les facteurs $\mathfrak{f}$ (mod. n) et écrire

$$A \equiv \mathfrak{f}_0 \mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_2 \cdots \mathfrak{f}_{n-1} \pmod{n},$$

où $\mathfrak{f}_1$ est la transformée indiciale de

$$\frac{x^n - 1}{x - r} \equiv (x-r)^{n-1} \pmod{n},$$

r étant égal à l'unité.

Pour les valeurs $\rho = 1$ et $r = 1$, les facteurs F_1 et $\mathfrak{f}_1$ coïncident. L'analogue peut se dire des dérivées successives de F_1 et de $\mathfrak{f}_1$ prises respectivement par rapport à ρ et à r.

Si l'on remarque en outre que, pour la valeur $r = 1$, les dérivées successives de $\mathfrak{f}_1$ par rapport à r sont, au signe près, les transformées indiciales des dérivées de $(x-1)^{n-1}$ par rapport à x, le critérium précédent peut encore s'énoncer comme il suit : *Si* $\rho - 1$ *divise le facteur* F_1 *à la puissance* θ *au plus, la suite récurrente* (1) *obéit à la loi irréductible* $(x-1)^{n-\theta}$ (*mod.* n).

Remarque. — Si n est premier, le circulant d'ordre n

$$(5) \qquad | \; n^\alpha - 1 \quad n^\alpha \quad n^\alpha \quad \ldots \quad n^\alpha \quad n^\alpha + 1 \; ||$$

obéit à la loi de récurrence irréductible $(x-1)^{n-1} \pmod{n}$.

En effet, de ce que pour le module n on a

$$(x-1)^{n-2} \equiv x^{n-2} + 2x^{n-3} + 3x^{n-4} + \cdots + (n-2)x^1 + n - 1,$$

il résulte immédiatement que le circulant (5) ne peut obéir à la loi $(x-1)^{n-2} \pmod{n}$.

Comme $F_0 = n^{\alpha+1}$, on conclut que le circulant (5) est divisible par n à la puissance $\alpha+2$ au plus. On a du reste vu précédemment [**26**, Rem. I] qu'il est égal à $n^{\alpha+2}$.

VII.

Multiplication des formes $\varphi(x^n-1)$.

41. Étant donnés deux circulants de même ordre n

$$A = |\, a_n \quad a_{n-1} \quad \dots \quad a_1 \,\|\,,$$
$$B = |\, b_n \quad b_{n-1} \quad \dots \quad b_1 \,\|\,,$$

nous convenons d'en effectuer le produit en multipliant les lignes de A (ou de B) successivement par celles de B (ou de A); ce produit donne ainsi lieu à deux variantes que nous désignons respectivement par AB et BA.

En posant

$$(1)\qquad \begin{cases} a_nb_n + a_{n-1}b_{n-1} + \dots + a_1b_1 = c_n, \\ a_nb_1 + a_{n-1}b_n + \dots + a_1b_2 = c_{n-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_nb_{n-1} + a_{n-1}b_{n-2} + \dots + a_1b_n = c_1, \end{cases}$$

on trouve

$$AB = |\, c_n \quad c_{n-1} \quad \dots \quad c_1 \,\|\,,$$
$$BA = |\, c_n \quad c_1 \quad \dots \quad c_{n-1} \,\|\,.$$

Remarque. — On pourrait encore effectuer la multiplication de A par B en combinant les lignes (ou colonnes) de A successivement avec les colonnes (ou lignes) de B. On obtiendrait ainsi un nouveau circulant qui, en général, diffère des circu-

lants AB et BA. En se conformant à nos conventions, on arriverait au même produit en multipliant A par le circulant déduit de B, en prenant ses éléments de $n-1$ en $n-1$, le terme initial restant le même.

42. Il est intéressant de voir comment il faut combiner les facteurs

$$F = a_n + a_{n-1}\rho + a_{n-2}\rho^2 + \cdots + a_1\rho^{n-1}$$

de A avec les facteurs

$$F' = b_n + b_{n-1}\rho + b_{n-2}\rho^2 + \cdots + b_1\rho^{n-1}$$

de B pour donner les facteurs

$$F'' = c_n + c_{n-1}\rho + c_{n-2}\rho^2 + \cdots + c_1\rho^{n-1}$$

du produit AB.

Ajoutons membre à membre les égalités (1) après les avoir multipliées respectivement par $1, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}$; la somme, ordonnée par rapport aux quantités $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ est

$$\left.\begin{aligned} & a_n(b_n + b_1\rho + b_2\rho^2 + \cdots + b_{n-1}\rho^{n-1}) \\ + & a_{n-1}(b_{n-1} + b_n\rho + b_1\rho^2 + \cdots + b_{n-2}\rho^{n-1}) \\ + & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + & a_1(b_1 + b_2\rho + \cdots + b_n\rho^{n-1}) \end{aligned}\right\} = F''.$$

Désignons les quantités entre parenthèses par $q_n, q_{n-1}, \ldots, q_1$ de sorte que

$$F'' = a_nq_n + a_{n-1}q_{n-1} + \cdots + a_1q_1.$$

Il est facile de voir que

$$\begin{aligned} q_{n-1} &= q_n\rho, \\ q_{n-2} &= q_{n-1}\rho = q_n\rho^2, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Donc

$$F'' = q_n(a_n + a_{n-1}\rho + a_{n-2}\rho^2 + \cdots a_1\rho^{n-1}) = q_n F.$$

Or q_n correspond à la transformée indiciale de $\frac{x^n - 1}{x - \frac{1}{\rho}}$ [**21**].

D'ailleurs pour $\rho^0 = 1$ on a $F''_0 = F_0 F'_0$. On en conclut que *le facteur* F *de* AB *qui correspond à la racine* ρ *est égal au produit du facteur de* A *correspondant à la même racine par celui de* B *correspondant à la racine conjuguée de* ρ. On a donc la relation

$$F''_i = F_i F'_{n-i}. \tag{2}$$

43. *Le circulant* AB *obéit, pour tout module premier divisant* A, *à la même loi de récurrence que le circulant* A, *et, pour tout module premier divisant* B, *à la loi inverse de celle à laquelle obéit le circulant* B.

En effet, la suite $c_1, c_2, \ldots, c_n$ peut s'écrire, en remplaçant $c_1, c_2, \ldots, c_n$ par leurs valeurs (1) et en ordonnant par rapport aux éléments $b_1, b_2, \ldots, b_n$,

$$\begin{aligned}
c_1 &= b_1 a_2 + b_2 a_3 + \cdots + b_n a_1, \\
c_2 &= b_1 a_3 + b_2 a_4 + \cdots + b_n a_2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
c_n &= b_1 a_1 + b_2 a_2 + \cdots + b_n a_n.
\end{aligned}$$

Les différentes colonnes des seconds membres de ce tableau sont constituées, à un facteur près, par la suite récurrente $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_1, \ldots$. En vertu du théorème du n° 9, la suite $c_1, c_2, \ldots, c_n$, c'est-à-dire le circulant AB, obéit à la même loi de récurrence que la suite $a_1, a_2, \ldots, a_n$, c'est-à-dire que le circulant A.

On démontrerait de même, en ordonnant les valeurs $c_1, c_2, \ldots, c_n$ par rapport à $a_1, a_2, \ldots, a_n$, que le circulant AB obéit à la loi de récurrence inverse de celle à laquelle obéit le circulant B.

44. *Étant donnés deux circulants*

$$C = | c_n \quad c_{n-1} \quad \dots \quad c_1 ||$$
$$A = | a_n \quad a_{n-1} \quad \dots \quad a_1 ||$$

obéissant suivant le module A *à la même loi de récurrence de degré* $< n$, *dont un coefficient au moins serait premier à* A, *il existe toujours un troisième circulant à éléments entiers*

$$B = | b_n \quad b_{n-1} \quad \dots \quad b_1 ||$$

tel que $C = AB$.

En effet, pour qu'il en soit ainsi, il faut que les égalités

$$\begin{aligned} a_n b_n &+ a_{n-1} b_{n-1} + \dots + a_1 b_1 = c_n, \\ a_1 b_n &+ a_n b_{n-1} + \dots + a_2 b_1 = c_1, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{n-1} b_n &+ a_{n-2} b_{n-1} + \dots + a_n b_1 = c_{n-1} \end{aligned}$$

donnent pour $b_n, b_{n-1}, \dots, b_1$ des valeurs entières. Or ces valeurs sont exprimées par des fractions dont le dénominateur est égal à A; les numérateurs sont divisibles par A, puisque les colonnes de leurs déterminants sont des suites récurrentes qui obéissent à une même loi de récurrence (mod. A) [**11**]. Les valeurs de $b_n, b_{n-1}, \dots, b_1$ sont donc entières.

45. En rapprochant le théorème du n° 44 de ceux des n^{os} 3 et 30, on conclut que *le circulant* AB *obéit pour tout module premier* p *à une loi qui est le p. g. c. d. de la loi irréductible à laquelle obéit le circulant* A (*mod.* p) *et de l'inverse de la loi irréductible à laquelle obéit le circulant* B (*mod.* p).

Reste à voir si la loi ainsi définie est également irréductible pour le circulant AB. Nous nous bornerons à élucider ce point pour les deux seuls cas suivants : $p \equiv 1 \pmod{n}$, et $p = n$.

46. Si $p \equiv 1 \pmod{n}$, la condition nécessaire et suffisante pour que le circulant AB obéisse (mod. p) à une loi irréductible

de degré d est que $n - d$ des facteurs $\mathfrak{F}''$ (mod. p) de AB soient congrus à zéro (mod. p) [**38**].

Or, la congruence $x^n - 1 \equiv 0$ (mod. p) ayant n racines réelles, on peut étendre les conditions du n° 42 aux facteurs $\mathfrak{F}$ (mod. p) et écrire la relation

$$\mathfrak{F}_i'' \equiv \mathfrak{F}_i \mathfrak{F}_{n-i} \pmod{p}$$

analogue à l'égalité (2). Il en résulte que la congruence $\mathfrak{F}_i'' \equiv 0$ (mod. p) exige que $\mathfrak{F}_i \equiv 0$ ou que $\mathfrak{F}_{n-i} \equiv 0$ (mod. p).

On voit que la loi *irréductible* à laquelle obéit le circulant AB est précisément la loi à laquelle il obéit en vertu du théorème du n° 45.

47. Supposons maintenant que $p = n$, n étant premier. D'après ce qu'on a vu [**26**, Rem. III], le problème qui nous occupe revient à déterminer à quelle puissance l'un des facteurs F_i'' ($i = 1, 2, \ldots, n - 1$) de AB contient $\rho - 1$. Il résulte de la relation (2) que c'est à la puissance $\theta + \theta'$ si les facteurs F_i et F_{n-i}' contiennent $\rho - 1$ respectivement aux puissances θ et θ'. On en conclut [**40**] que *si les circulants* A *et* B *obéissent respectivement aux lois irréductibles* $(x - 1)^{n-\theta}$ (*mod.* n) *et* $(x - 1)^{n-\theta'}$ (*mod.* n), *le produit* AB *obéit à la loi irréductible* $(x - 1)^{n-\theta-\theta'}$ (*mod.* n).

Cette loi est d'ordre zéro, c'est-à-dire que tous les éléments du circulant AB sont divisibles par n, pour $\theta + \theta' \geqq n$.

On remarquera que si θ et θ' sont compris entre 0 et n, autrement dit si les circulants A et B sont divisibles par n sans que tous leurs éléments le soient, le circulant AB obéit toujours (mod. n) à une loi irréductible d'un degré moindre que la loi définie au n° 45.

48. *Si l'on transforme les circulants* A *et* B *en prenant leurs éments de* m *en* m [**19**, *Rem.* I], *l'élément initial restant le même, le produit des nouveaux circulants se déduit du circulant* AB *en prenant les éléments de* m *en* m, *l'élément initial restant le même.*

A_1 et B_1 étant les circulants transformés, désignons par $F_{1,i}$, $F'_{1,i}$, $F''_{1,i}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ respectivement un facteur F de A_1, B_1, A_1B_1. On voit aisément que $F_{1,i} = F_{m_1 i}$, m_1 étant l'associé de m pour le module n premier, par hypothèse, à m; de même $F'_{1,i} = F'_{m_1 i}$. Tenant compte de ces égalités, la relation (2) permet d'écrire

$$F''_{1,i} = F_{1,i}F'_{1,n-i} = F_{m_1 i}F'_{m_1(n-i)} = F''_{m_1 i},$$

ce qui est l'expression même du théorème.

VIII.

Remarques sur les circulants égaux à l'unité.

49. *Un circulant d'ordre* n, n *étant impair, ne peut être égal à l'unité que s'il est symétrique* [**27**].

Supposons que le circulant

$$(1) \qquad \| a_n \quad a_{n-1} \quad \ldots \quad a_1 \|$$

soit égal à l'unité.

Le circulant

$$(2) \qquad \| a_n \quad a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_{n-1} \|$$

est aussi égal à l'unité [**19**, Rem. II].

Divisant le circulant (1) par le circulant (2) on obtient un circulant

$$(3) \qquad \| b_n \quad b_{n-1} \quad \ldots \quad b_1 \|$$

dont les éléments sont entiers [**44**].

Représentons respectivement par F_i, F'_i, F''_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ les facteurs F des circulants (1), (2), (3) [**21**]. Ces facteurs satisfont aux relations [**42**]

$$(4) \qquad F_i = F'_i F''_{n-i},$$

$$(5) \qquad F_{n-i} = F'_{n-i} F''_i.$$

Mais, comme le circulant (2) se déduit du circulant (1) en renversant l'ordre des éléments, l'élément initial restant le même, on a

$$F_i = F'_{n-i}, \qquad F_{n-i} = F'_i. \tag{6}$$

Multipliant les égalités (4) et (5) membre à membre, et tenant compte des relations (6), il vient

$$F''_i F''_{n-i} = 1. \tag{7}$$

Si l'on rapproche l'égalité (7) de la relation (2) du n° 42, on voit que le produit des circulants

$$| b_n \quad b_{n-1} \quad \dots \quad b_1 \| \times | b_n \quad b_{n-1} \quad \dots \quad b_1 \| \tag{8}$$

doit être égal à un circulant dont tous les facteurs F sont égaux à l'unité, c'est-à-dire au circulant $| 1 \; 0 \; 0 \; \dots \; 0 \|$.

Effectuons le produit (8); il vient [**41**]

$$\begin{aligned}
&b_n^2 + b_{n-1}^2 + \dots + b_1^2 = 1,\\
&b_n b_1 + b_{n-1} b_n + \dots + b_1 b_2 = 0,\\
&b_n b_2 + b_{n-1} b_1 + \dots + b_1 b_3 = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&b_n b_{n-1} + b_{n-1} b_{n-2} + \dots + b_1 b_n = 0.
\end{aligned}$$

On conclut de là que tous les éléments b sont nuls, sauf un seul, par exemple b_k, qui est égal à ± 1. Il est facile de voir que le signe $+$ est seul à considérer si n est impair; en effet, les facteurs F'' sont au nombre de n; leur produit a pour valeur $+1$, puisqu'il est égal au circulant (3). Si, de plus, on tient compte de la relation (7), on voit que F''_0 doit être égal à $+1$, c'est-à-dire que $b_k = +1$.

Dès lors il vient, ρ ayant la signification définie au n° 21,

$$F''_i = \rho^{(n-k)i}, \qquad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1) \tag{9}$$

$$F''_{n-i} = \rho^{ki}. \tag{10}$$

Si, dans la relation (4), on remplace F''_{n-i} par sa valeur (10), on obtient

$$F_i = \rho^{ki} F'_i.$$

Mais

$$F_i = a_n + a_{n-1}\rho^i + a_{n-2}\rho^{2i} + \cdots + a_1\rho^{(n-1)i},$$
$$\rho^{ki}F'_i = a_n\rho^{ki} + a_1\rho^{(k+1)i} + a_2\rho^{(k+2)i} + \cdots + a_{n-1}\rho^{(k+n-1)i}.$$

Ces deux expressions devant être identiques pour toutes les valeurs 0, 1, 2, ..., $n-1$ de i, on conclut que

$$a_n = a_{n-k}, \quad a_{n-1} = a_{n+1-k}, \quad \cdots \quad a_{n-t} = a_{n+t-k},$$

c'est-à-dire que le circulant (1) est symétrique.

Si l'on pose

$$n - t = n + t - k,$$

il vient $t = \frac{k}{2}$.

Il résulte de là que l'indice $n - \frac{k}{2}$ caractérise un axe de symétrie du circulant (1). Un second axe est caractérisé par l'indice $n - \frac{n+k}{2}$. L'un de ces indices est entier, l'autre est fractionnaire, c'est-à-dire que l'un des axes de symétrie coïncide avec un élément du circulant (1), l'autre tombe entre deux éléments consécutifs égaux [**27**].

Remarque. — Il est facile de voir que les développements précédents peuvent s'étendre au cas où n est pair, à condition que l'on affecte du double signe les seconds membres des égalités (9) et (10). La conclusion finale serait que

$$(11)\quad a_n = \pm a_{n-k}, \quad a_{n-1} = \pm a_{n+1-k}, \quad \cdots \quad a_{n-t} = \pm a_{n+t-k}.$$

Dans toutes ces égalités, il faudra prendre le même signe. Donc, si l'on fait abstraction des signes de ses éléments, le circulant (1) est encore symétrique si n est pair.

On éluciderait comme ci-dessus la question des axes de symétrie; au surplus la question a déjà été traitée au n° 27. Notons que le circulant (14) du n° 27 peut être égal à l'unité, mais non le circulant (13), car le facteur F_0 de ce dernier est pair ou nul suivant que l'on prend dans les égalités (11) le signe + ou le signe —.

50. Lemme. — *Le nombre* n *étant premier impair, soit le circulant symétrique d'ordre* n

$$A_1 = |\,0 \quad 1 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad 1\,|,$$

dont la valeur numérique est 2 [**24**]. *Soient* A_2, A_3, ..., A_μ $\left(\text{où } \mu = \frac{n-1}{2}\right)$ *les circulants déduits de* A_1 *en prenant les éléments de deux en deux, de trois en trois, ..., de* μ *en* μ [**19**, Rem. I], *l'élément initial restant le même. Je dis que le produit* $A_1 A_2 \ldots A_\mu$ *est un circulant de la forme*

$$C = |\,b \quad a \quad a \quad \ldots \quad a\,| = 2^\mu, \tag{12}$$

où

$$b - a = \pm 1. \tag{13}$$

Si, dans chacun des circulants $A_1, A_2, \ldots, A_\mu$, on prend les éléments de i en i ($i = 2, 3, \ldots, \mu$), l'élément initial, qui est un axe de symétrie [**27**], restant le même, le produit se déduit du circulant C en prenant également les éléments de i en i, l'élément initial restant le même [**48**]. Or, les μ nouveaux circulants ne diffèrent de ceux qui ont donné le produit C que par l'ordre, et comme ils sont symétriques, leur produit est indépendant de leur ordre (*). On en conclut que le circulant symétrique C ne doit pas changer si l'on prend ses éléments

(*) Ceci résulte immédiatement du principe de la multiplication exposé aux n^{os} 41 et 42.

de i en i ($i = 2, 3, \ldots, \mu$), l'élément initial restant le même; mais alors il doit avoir la forme (12) que nous avons prévue.

Reste à montrer que la relation (13) doit avoir lieu.

Considérons le circulant

$$| b - a \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \| = Q$$

qui se déduit du circulant (12) en retranchant a de chaque élément. On a vu [**22**] que

$$Q = 2^{\mu} - na; \tag{14}$$

mais on a aussi

$$Q = (b - a)^n. \tag{15}$$

D'après une observation déjà faite au n° 42, le facteur F_0 du circulant C doit être égal au produit des facteurs F_0 des circulants $A_1, A_2, \ldots, A_\mu$. On a donc l'égalité

$$2^{\mu} = (n - 1)a + b. \tag{16}$$

Éliminant b entre les relations (15) et (16), il vient

$$Q = (2^{\mu} - na)^n. \tag{17}$$

Pour que les égalités (14) et (17) soient compatibles, il faut que

$$2^{\mu} - na = \pm 1. \tag{18}$$

La combinaison des relations (16) et (18) donne l'égalité (13).

51. Examinons dans quelles conditions le circulant symétrique B_1 d'ordre n

$$| nd_1 \quad c \quad nd_2 \quad nd_3 \quad \ldots \quad nd_{\mu-1} \quad nd_\mu \quad nd_\mu \quad nd_{\mu-1} \quad \ldots \quad nd_3 \quad nd_2 \quad c \|$$

peut être égal à l'unité, n étant un nombre premier impair.

Soient $B_2, B_3, \ldots, B_\mu$ les circulants déduits du circulant B_1 en prenant les éléments de deux en deux, de trois en trois, ..., de μ en μ, l'élément initial restant le même [**19**, Rem. I]. Supposons que le produit des circulants $B_1, B_2 \ldots, B_\mu$ soit le circulant D. Si dans chacun des circulants $B_1, B_2, \ldots, B_\mu$ on prend les éléments de i en i ($i = 2, 3, \ldots, \mu$), l'élément initial restant le même, le produit se déduit du circulant D en prenant également les éléments de i en i, l'élément initial restant le même [**48**]. Or les μ nouveaux circulants ne diffèrent de ceux qui ont donné comme produit le circulant D que par l'ordre, et, comme ils sont symétriques, leur produit est indépendant de leur ordre. On en conclut que le circulant D ne doit pas changer si l'on prend ses éléments de i en i, l'élément initial restant le même. On peut donc écrire

$$D = |\, f \quad g \quad g \quad \ldots \quad g \,\|\,.$$

Si l'on fait $d_1 = d_2 = d_3 = \cdots = d_\mu = 0$, les éléments des circulants B_1 et A_1 [**50**] ne diffèrent que par la constante multiplicative c; de même les éléments des circulants D et C ne diffèrent que par la constante c^μ. On peut donc poser, en tenant compte du théorème du n° 23,

$$\begin{aligned} f &= bc^\mu + h = 1, \\ g &= ac^\mu + h' = 0, \end{aligned} \tag{19}$$

h et h' ne contenant que des éléments divisibles par n. Comme c ne peut être divisible par n, car sinon tous les éléments du circulant B_1 seraient divisibles par n, la relation (19) exige que

$$a \equiv 0 \qquad (\text{mod. } n).$$

Dès lors la relation (18) conduit à la condition

$$2^\mu \pm 1 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } n^2).$$

On sait (*) que cette congruence n'est vérifiée que pour de très rares modules, si toutefois elle l'est. Remarquons en outre qu'elle constitue une condition nécessaire, mais qui, peut-être, n'est pas suffisante de l'existence de circulants du type B_1 égaux à l'unité. Cette existence reste donc très problématique.

(*) Dans le *Journal für reine und angew. Math.*, t. III (1828), p. 212, N.-H. Abel avait posé la question suivante : $\alpha^{\mu-1} - 1$ peut-il être divisible par μ^2, μ étant premier et α un nombre entier ($1 < \alpha < \mu$). C.-G.-J. Jacobi résolut la question par l'affirmative et montra que la plus petite solution du problème était donnée par la congruence $3^{10} - 1 \equiv 0 \pmod{11^2}$. (*Journal für reine und angew. Math.*, t. III [1828], p. 301.) Plus récemment, J.-J. Sylvester, *Comptes rendus Acad. Sc.*, Paris, t. LII (1861), p. 161, M.-A. Stern, *Journal für reine und angew. Math.*, t. C (1887), p. 182, et D. Mirimanoff, *Journal für reine und angew. Math.*, t. CXV (1895), p. 295, se sont occupés de la question.

E. Lucas, *Théorie des nombres*, Paris, 1891, p. 423, signale que, pour $a = 10$, le seul nombre premier $\mu < 1000$ qui satisfasse à la question posée par Abel est $\mu = 487$.

APPENDICE

La publication de ce mémoire, qui était à l'impression en été 1914, a été retardée par les tristes événements que l'on sait. Continuant nos recherches, nous avons rencontré quelques propositions que nous voudrions signaler pour prendre date.

Si dans un polynome de degré m en x on remplace les exposants par des indices, on obtient une nouvelle fonction dans laquelle on peut considérer les éléments x_m, x_{m-1}, ... comme des variables indépendantes. Nous dirons que la nouvelle fonction est la *transformée indiciale* ou, plus brièvement, l'*indiciale* de la fonction primitive pour la variable x. Nous ferons précéder la fonction qui subit la transformation indiciale de la lettre gothique $\mathfrak{J}$ affectée au besoin d'un indice qui précise la variable sujette à transformation.

Modifiant quelque peu les notations employées dans ce mémoire, nous représenterons un déterminant récurrent [**4**] par le dernier élément de la première ligne placé entre deux doubles barres, un indice désignant le degré du déterminant. Les éléments des déterminants récurrents que nous envisagerons sont toujours des transformées indiciales, et c'est la lettre sujette à la transformation indiciale qui subit la majoration de l'indice pour passer d'une rangée du déterminant à la voisine.

Nous conserverons à $f(x)$ [**1**] et à ρ_i [**15**] la signification qu'ils avaient dans ce mémoire ; nous désignerons par $v_0, v_1, \ldots$ les éléments de la *suite récurrente fondamentale* [**8**] de loi $f(x)$ et par $G(x)$ une fonction entière quelconque de degré m dont γ_0 serait le coefficient initial et $r_j (j = 1, 2, \ldots, m)$ les racines.

On a les propositions suivantes :

I. — La suite

$$(1) \qquad \mathfrak{I}\,G(v), \qquad \mathfrak{I}\,vG(v), \qquad \mathfrak{I}\,v^2G(v), \qquad \ldots$$

est une suite récurrente de loi f. Inversement, étant donnée une suite récurrente $x_0, x_1, x_2, \ldots$ de loi f, on peut toujours déterminer une fonction G, et une seule, de degré $n-1$ au plus, telle que

$$x_i = \mathfrak{I}\,v^i G(v) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

II. — Si les fonctions f et G ont un plus grand commun diviseur de degré n_1, la suite récurrente (1) est de *rang* [2] $n - n_1$.

III. — Le nombre algébrique $G(\rho_i)$ est identique à celui obtenu en faisant

$$x_i = \mathfrak{I}\,v^i G(v) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

dans l'expression

$$\mathfrak{I}_x \frac{f(x)}{x - \rho_i}. \qquad (*)$$

IV. — On a la relation

$$\prod_{i=1}^{i=n} \{ X - G(\rho_i) \} = \| \mathfrak{I}_v \{ v^0 X - G(v) \} \|_n,$$

dont on déduit

$$(2) \qquad \mathfrak{N}\big(G(\rho_i)\big) = \| \mathfrak{I}\,G(v) \|_n,$$

$\mathfrak{N}\big(G(\rho_i)\big)$ étant la norme du nombre algébrique $G(\rho_i)$ (**).

(*) Voyez note (*) p. 18.

(**) C'est là, sous un énoncé différent, la proposition qui fait l'objet du n° 14.

De la formule

$$G(\rho_i) = \gamma_0 \prod_{j=1}^{j=m} (\rho_i - r_j)$$

et de la relation (2) on déduit

$$(3) \qquad \mathfrak{N}.\big(G(\rho_i)\big) = \gamma_0^n \prod_{i=1}^{i=n} \prod_{j=1}^{j=m} (\rho_i - r_j) = \| \mathfrak{I} G(v) \|_n .$$

La suite (1) étant de même rang que le déterminant $\| \mathfrak{I} G(v) \|_n$ [7], on conclut de la proposition II et de la relation (3) que, pour que les fonctions f et G aient n_1 racines communes, il faut et il suffit que le déterminant $\| \mathfrak{I} G(v) \|_n$ soit de rang $n - n_1$. Ce déterminant peut encore être considéré comme étant la *résultante* des fonctions f et G.

V. — En particulier, si $G(x)$ est égal à la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$, on a

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_0 \rho_i^h = \mathfrak{I} v^h f'(v).$$

On peut, dans cette formule, donner à h toutes les valeurs entières aussi bien positives que négatives si l'on convient de prolonger la suite fondamentale à *gauche* (*).

Si Δ_1 est le discriminant de f, on a l'égalité

$$\Delta_1 = \| \mathfrak{I} f'(v) \|_n ,$$

qui est l'expression d'un théorème connu.

VI. — Si $H(x)$ est une fonction entière quelconque, qui du reste peut se réduire à x^0, c'est-à-dire à l'unité, et que l'on pose

$$V_i = \mathfrak{I} H(v) \{ G(v) \}^i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

(*) Voyez note (*) p. 3.

la suite

$$V_0,\quad V_1,\quad V_2,\quad \ldots$$

est une suite récurrente de loi

$$\| \mathfrak{I}_v \{ Xv^0 - G(v) \} \|_n.$$

VII. — On a la relation

$$\| \mathfrak{I} G(v) \|_n \times \| \mathfrak{I} H(v) \|_n = \| \mathfrak{I} \{ G(v) H(v) \} \|_n.$$

VIII. — Si la fonction $f(x)$ satisfait à l'égalité

$$f(x) = f_1(x) f_2(x),$$

où $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont des fonctions entières de degré n_1 et n_2, on a la relation

$$\| \mathfrak{I} G(v) \|_n = \| \mathfrak{I} G(y) \|_{n_1} \times \| \mathfrak{I} G(z) \|_{n_2},$$

$y_0, y_1, y_2, \ldots$ et $z_0, z_1, z_2, \ldots$ désignant respectivement les suites fondamentales de loi f_1 et f_2.

IX. — Si l'on désigne par $w_{(t),k}$ la transformée indiciale de $w_{(t)}^k$, où $w_{(t)}$ est une variable, par $w_{(t),0}, w_{(t),1}, w_{(t),2}, \ldots$ les éléments de la suite fondamentale de loi G^t, le produit

$$\prod_{i=1}^{i=n} \{ X - G(\rho_i) \}$$

est encore égal à

$$(-1)^{(m+1)n} \frac{\gamma_0^n}{a_0^m} \left\| \mathfrak{I} f(w_{(1)}) + \frac{X}{\gamma_0} \mathfrak{I} f(w_{(2)}) + \cdots + \frac{X^s}{\gamma_0^s} \mathfrak{I} f(w_{(s+1)}) \right\|_m^{(*)},$$

s satisfaisant à la condition $sm \geqq n + m$.

(*) En exposant nos notations, nous n'avons considéré que des déterminants récurrents à une seule variable. Le cas se présente ici d'un déterminant récurrent à plusieurs variables $w_{(1)}, w_{(2)}, w_{(3)}, \ldots$ Il va de soi que pour passer d'une rangée du déterminant à la voisine, on majorera d'une unité l'indice de chacune de ces variables.

X. — La proposition précédente permet de résoudre de façon élémentaire le problème suivant : Existe-t-il des nombres algébriques entiers $\frac{(G\rho)}{p}$ lorsque f et G sont des fonctions à coefficients entiers, p étant un nombre premier.

Le cas le plus simple est celui où

$$f \equiv G^{\delta} \pmod{p}, \tag{4}$$

δ étant un nombre entier. On écrira alors l'égalité

$$f = G^{\delta} + \sum_{i=1}^{i=\delta} L_i p^{\alpha_i} G^{\delta - i}, \tag{5}$$

où L_i sont des fonctions de degré moindre que m.

De cette égalité on déduit aisément, en tenant compte de la proposition IX, que la condition suffisante pour que $\frac{G(\rho)}{p}$ soit un nombre algébrique entier est que dans la relation (5) on ait

$$\alpha_i \geqq i. \tag{6}$$

La réciproque, c'est-à-dire la démonstration que cette condition, qui est suffisante, est aussi nécessaire, ne présente pas non plus de difficulté.

Si la relation (5) n'a pas lieu, il faut cependant que la fonction G contienne (mod. p) tous les facteurs premiers (mod. p) de f. On déterminerait la fonction Q de moindre degré qui, multipliée par f, donne un produit congru (mod. p) à une puissance entière δ de G. On écrirait une relation analogue à (5) dont le premier membre serait Qf. Les conclusions sont les mêmes que ci-dessus.

Liége, juin 1919.

RECHERCHES ANATOMIQUES

SUR LE

TARAXACUM VULGARE Schrk.

PAR

Mlle E. FRITSCHÉ

RÉGENTE A LA SECTION NORMALE DE L'ÉTAT, A LIÉGE

BRUXELLES

HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

Rue de Louvain, 112

—

1914

INTRODUCTION

Les plantes les plus communes peuvent fournir d'intéressants sujets d'étude. Habitués à les voir journellement, nous sommes ordinairement peu portés à fixer notre attention sur elles. Le vulgaire Pissenlit est l'une de ces plantes trop négligées, comme le prouve l'étonnante découverte relative à la production parthénogénétique de ses graines.

C'est le développement de cette plante à partir de la germination qui a provoqué d'abord mes observations; puis ce fut la structure de ses organes souterrains où l'on reconnaît si difficilement, à première vue, ce qui appartient à la tige et ce qui fait réellement partie de la racine. Quelques expériences enfin ont servi de confirmation à mes constatations.

Je considère comme un agréable devoir d'exprimer ma profonde reconnaissance à M. le Prof. Gravis : c'est à ses excellents conseils que je dois d'avoir mené à bien cette étude.

RECHERCHES ANATOMIQUES

SUR LE

TARAXACUM VULGARE Schrk.

I. — CARACTÈRES EXTÉRIEURS

Le Pissenlit, très commun dans les prairies, aux bords des chemins et dans les pelouses de nos jardins, est une plante vivace à tiges souterraines si peu apparentes qu'il n'est pas possible de les distinguer extérieurement et qu'il est même difficile de les reconnaître par les caractères anatomiques. Les feuilles, insérées au niveau du sol, s'étalent en rosette. Des hampes florifères apparaissent au tout premier printemps et se succèdent jusqu'au milieu de l'été.

Les organes souterrains forment souvent, chez le Pissenlit, un enchevêtrement qu'il est malaisé de décrire à première vue. Nous avons donc fait des semis et nous avons étudié tout le développement, à partir de la germination, pendant plusieurs années.

La plantule a deux cotylédons épigés; elle produit bientôt une première rosette de feuilles, et sa croissance est si rapide que, dès le mois d'août, elle possède une première hampe qui passe l'hiver à l'état de bouton et qui fleurit au printemps suivant. Nous étudierons d'abord une plante à l'époque de sa pre-

mière floraison (c'est-à-dire au printemps qui suit le semis); puis nous décrirons les modifications qui se manifestent successivement pendant les années ultérieures.

A. Plante a l'époque de la première floraison (fig. 1). — La tige, très courte, ne dépasse pas le niveau du sol ; elle est continuée inférieurement par une racine (racine principale) qui donne naissance à deux ou trois racines secondaires et à un grand nombre de fines radicelles. Les feuilles de l'année précédente ont disparu en laissant quelques cicatrices indiquées en traits noirs dans la figure 1. Vers le haut, un grand nombre de feuilles sont insérées très près l'une de l'autre et sont disposées en rosette étalée à la surface du sol.

Parmi les hampes florifères, on en distingue une au centre qui est déjà bien épanouie, alors que les autres sont encore à l'état de boutons. La position des hampes latérales est difficile à déterminer à première vue, car les entre-nœuds de la tige sont très courts. Des coupes transversales dans cette région (fig. 2) montrent que la hampe du centre termine la tige principale, tandis que les autres hampes sont le prolongement de chacun des sommets de bourgeons latéraux ; ceux-ci occupent chacun l'aisselle d'une feuille; ils portent déjà eux-mêmes plusieurs bourgeons dont un certain nombre possèdent leur hampe terminale bien apparente. Il y a donc une grande quantité de bourgeons d'âges différents ; c'est ce qui explique l'apparition successive de nombreuses hampes florales.

La surface de la racine principale présente, dans toute sa longueur, des plis transversaux.

Après la floraison, qui se termine vers les mois de juillet-août, les hampes se flétrissent; il se produit une nécrose au sommet de la tige principale et de chacun des bourgeons. La croissance est donc définie. Le sommet de la tige meurt, ainsi qu'un certain nombre de bourgeons qui tous étaient terminés par une hampe. La végétation n'est cependant pas arrêtée : des bourgeons latéraux ont pris naissance ; ils portent déjà une hampe terminale à l'état de bouton, et passent l'hiver à l'état

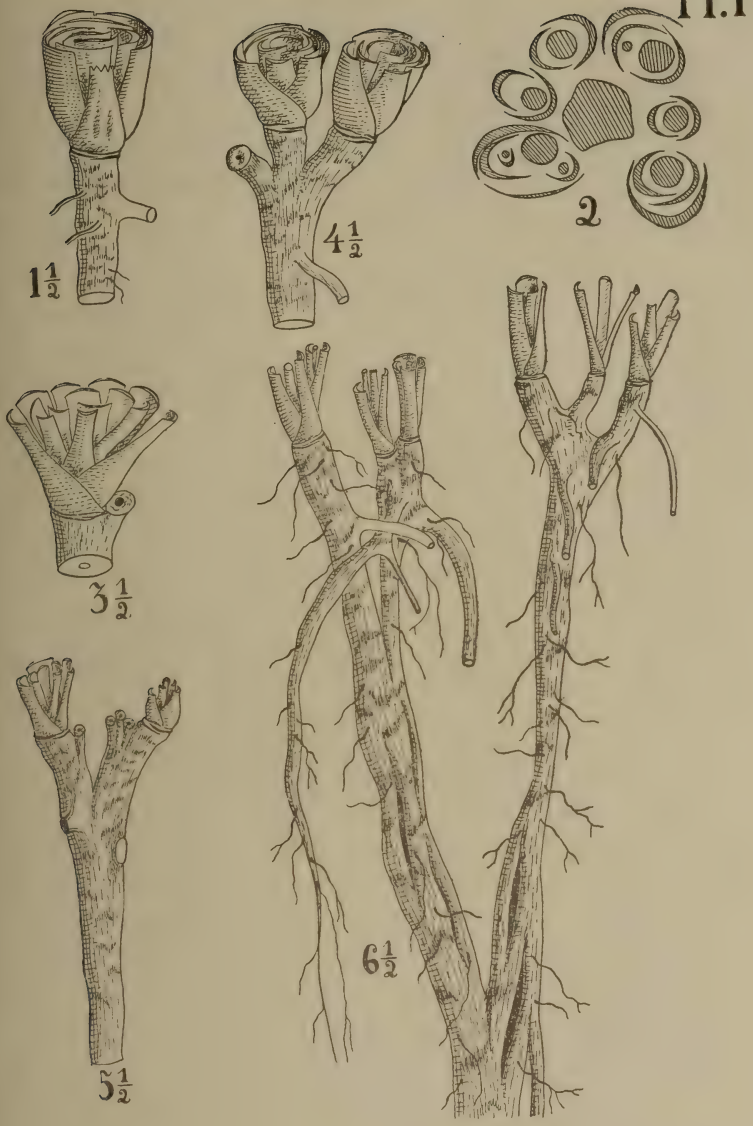


Fig. 1. Plante à l'époque de la première floraison (p. 6). — Fig. 2. Coupe transversale passant par la base des hampes (p. 6). — Fig. 3. Plante d'un an, vers le milieu de l'été (p. 8). — Fig. 4. Plante à l'époque de la deuxième floraison (p. 8). — Fig. 5. Plante âgée de plusieurs années (p. 8). — Fig. 6. Plante très vieille (p. 9).

latent. Ce sont des bourgeons de remplacement. On peut donc observer, à cette époque, des rameaux morts à côté de sommets en pleine végétation (fig. 3).

En même temps, il y a décortication : tous les tissus de la racine qui étaient plissés meurent et se décomposent. Une surface subérisée lisse apparaît.

B. Plante a l'époque de la deuxième floraison (fig. 4). — Au printemps suivant, il y a donc plusieurs bourgeons qui se développent (ordinairement deux ou trois) ; ils étalent chacun leurs feuilles à la surface du sol ; les rosaces qu'elles forment s'entrecroisent et semblent n'en former qu'une.

Chacun de ces bourgeons se comporte comme la tige mère, c'est-à-dire que son sommet se prolonge en une hampe et qu'il produit un grand nombre de bourgeons latéraux ; les uns se développent immédiatement, les autres attendent le printemps suivant.

A la fin de l'année, une nouvelle décortication a lieu : elle fait disparaître les cicatrices foliaires de la tige principale.

C. Plante agée de plusieurs années (fig. 5). — Une plante âgée est toujours pourvue de nombreux bourgeons de remplacement, mais beaucoup d'entre eux meurent. Il n'y a ordinairement qu'un seul bourgeon qui persiste au sommet de chacun des rameaux et qui continue la végétation. Pendant les premières années, la plante ne possède donc que deux ou trois rameaux ; ceux-ci s'allongent par la superposition de bourgeons latéraux qui, chaque année, prennent la place du sommet disparu et forment de véritables sympodes.

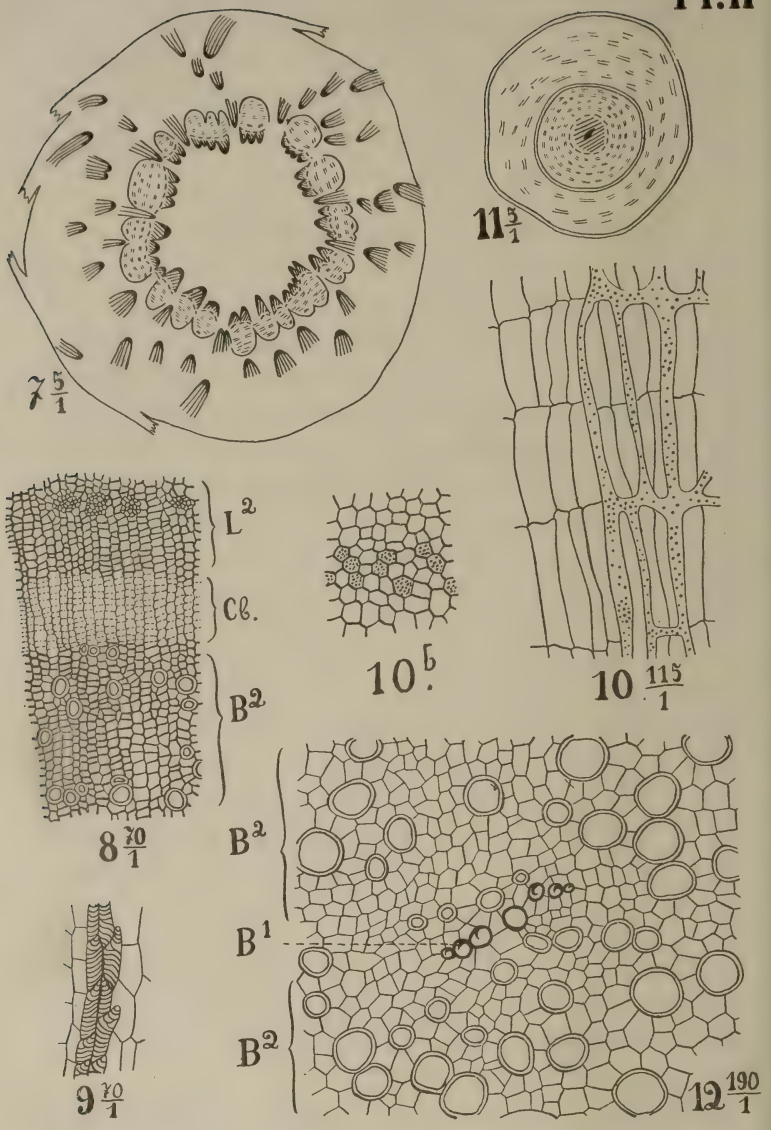
Les décortications successives font disparaître les cicatrices foliaires ainsi que les cicatrices résultant de la destruction des hampes successives. Celles qui sont visibles à la partie supérieure des rameaux sont assez récentes ; elles sont d'ailleurs en voie de disparition. Il est donc impossible de déterminer l'âge d'un Pissenlit à partir de la deuxième floraison.

D. Plante très vieille (fig. 6). — Lorsque la plante est très vieille, âgée de quinze à vingt-cinq ans par exemple, on remarquera qu'il s'est formé un grand nombre de divisions longitudinales dans les tiges et dans les racines. Cette disposition nouvelle sera expliquée lorsque nous étudierons l'anatomie des très vieilles plantes.

II. — ANATOMIE

A. Plante a l'époque de la première floraison (fig. 1). — *Tige.* — On reconnaît la tige aux cicatrices foliaires qu'elle porte encore à cet âge. La coupe, figure 7, montre que les faisceaux sont bien distincts et disposés en un cercle. Chacun d'eux possède un cambium qui a produit du bois secondaire et du liber secondaire (fig. 8). Les vaisseaux du bois sont formés de cellules courtes dont les parois ont des épaississements en anneaux ou en spirales très rapprochés les uns des autres (fig. 9). Les cellules du parenchyme ligneux sont prismatiques, allongées dans le sens de l'axe de la tige; elles sont disposées assez régulièrement en séries rayonnantes (fig. 8). Les cellules du parenchyme libérien sont également prismatiques; elles se superposent en séries longitudinales et sont juxtaposées en bandes radiales très régulières (fig. 10); au sein de ce parenchyme existent des zones plus étroites, concentriques et sombres, constituées par des îlots de cellules grillagées entremêlées de laticifères. Ceux-ci sont fréquemment anastomosés entre eux. Le tissu fondamental, tant interne qu'externe, a pris un assez grand développement; ses cellules sont à peu près isodiamétriques et ont des parois minces; elles sont en voie de destruction dans le parenchyme externe; dans ce dernier sont éparpillés de nombreux faisceaux foliaires.

Racine (fig. 11, 12). — Le bois primaire est représenté par deux pôles centripètes; le bois secondaire, produit par une zone cambiale continue, est formé d'éléments semblables à ceux de la tige. Le liber secondaire est ici très développé : c'est lui



Anatomie d'une plante à l'époque de la première floraison : Fig. 7, 8, 9, 10. Coupes faites dans la tige. — Fig. 11, 12. Coupes faites dans la racine (p. 9).

qui produit la tubérisation. Les massifs de cellules grillagées sont disposés assez régulièrement en cercles concentriques au sein du parenchyme libérien. Les couches situées vers la périphérie sont en voie de nécrose : c'est la portion de l'écorce destinée à disparaître après la floraison.

Si l'on compare les figures 7 et 11, on remarque que la tige présente un tissu fondamental interne (moelle) très développé, qui fait complètement défaut dans la racine. Le liber secondaire a pris de grandes proportions dans la racine, tandis qu'il reste insignifiant dans la tige. Ces deux caractères permettent de reconnaître ces organes à l'œil nu et de déterminer aisément leur limite dans les jeunes plantes. C'est ce que représente le schéma 23 (voir plus loin, p. 18).

B. Plante a l'époque de la deuxième floraison. — *Tige.* — La coupe faite un peu au-dessous de la naissance des rameaux (fig. 13) permet de reconnaître trois groupes de faisceaux dont le bois est complètement entouré d'une zone cambiale propre. Cette disposition, bien différente de ce que nous avons constaté au stade précédent, provient de ceci : après la disparition de la hampe terminale, la majeure partie du tissu fondamental interne (moelle) est morte. Cette nécrose a provoqué le recloisonnement des cellules restées vivantes, et ainsi s'est produit un cambium que nous appellerons « cambium adventif » pour le distinguer du « cambium normal » situé entre le bois et le liber du faisceau primitif (1). Mais au lieu de former une zone

(1) M. le Prof. A. Gravis qualifie d'adventive toute zone cambiale qui prend naissance plus ou moins tardivement par recloisonnement de cellules appartenant à un tissu primaire ou secondaire déjà différencié. Il oppose ce terme à celui de zone cambiale normale, laquelle prend naissance de très bonne heure entre le bois et le liber d'un faisceau et qui de là s'étend souvent dans le tissu fondamental voisin. L'apparition d'un cambium adventif est provoquée parfois par une nécrose, mais plus souvent par une simple diminution de la vitalité de certains éléments histologiques. Cette apparition est le résultat d'une réaction de l'organisme à une excitation interne.

Conformément à la *Loi des surfaces libres* de M. Eug. Bertrand (1), un

(1) *Bulletin de la Société botanique de France*, t. XXXI, séance du 11 janvier, 1884.

continue contre le tissu mort, le cambium adventif rejoint, en certains points, la zone cambiale normale pour former avec elle une zone continue contournant le bois des trois groupes de faisceaux visibles dans la figure 13. Chacun des trois anneaux générateurs se compose donc de deux portions : une externe provenant du cambium normal, une interne représentant le cambium adventif. Ce dernier produit du liber secondaire adventif. Le liber adventif ne diffère d'ailleurs pas du liber normal avec lequel il se met en continuité ; il est centrifuge par rapport au massif ligneux qu'il entoure : dans la figure 13 et les figures suivantes, le cambium normal est indiqué par un trait interrompu, tandis que le cambium adventif est représenté par une ligne pointillée.

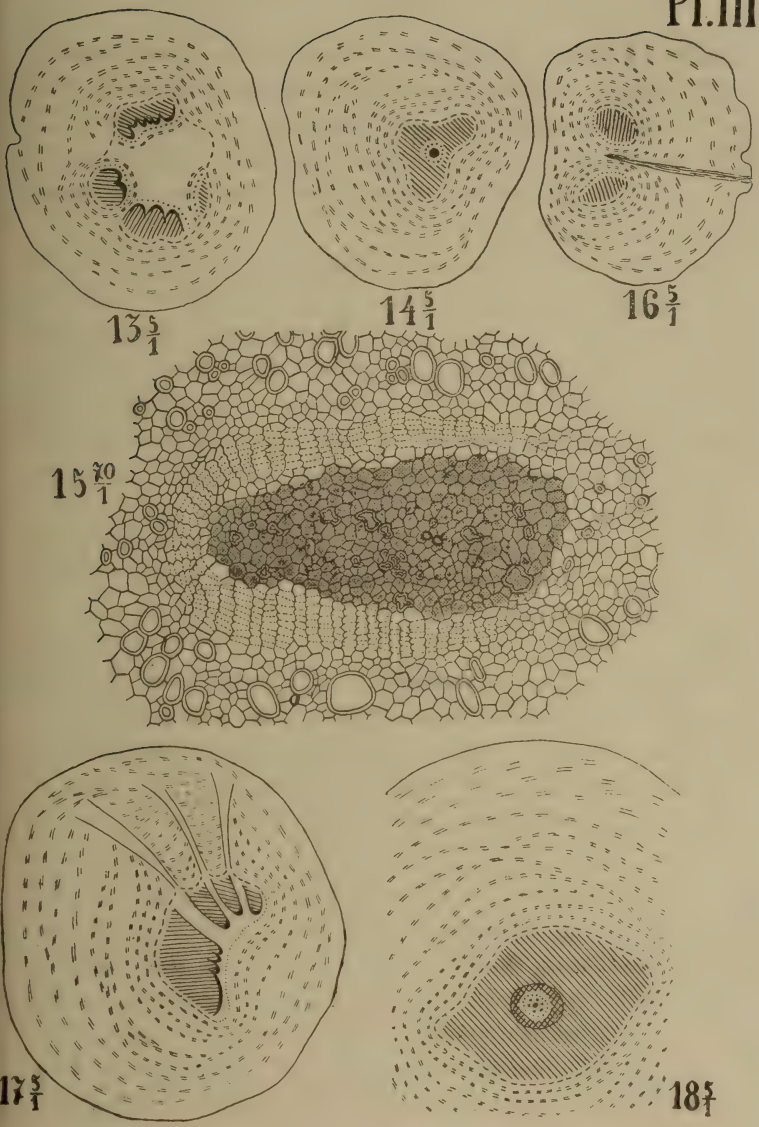
A certains niveaux, on peut remarquer l'un des massifs ligneux complètement isolé ; on n'y distingue plus du tout la limite entre les deux portions de cambium. Dans d'autres massifs, on peut encore constater la jonction de la zone cambiale adventive à la zone cambiale normale. Il existe aussi des portions de cambium normal devenues inactives entre les massifs ligneux ; elles sont en train de disparaître.

Si au lieu d'examiner la tige au-dessous de la naissance des rameaux, on observe la coupe d'un rameau, on lui trouve la structure normale que nous avons décrite dans la tige au stade précédent.

---

cambium adventif produit du liber secondaire adventif vers la région excitante, et du bois secondaire adventif du côté opposé. La genèse des tissus adventifs rappelle entièrement celle des organes adventifs chez les végétaux : racines adventives sur une bouture de tige ; bourgeons adventifs sur une bouture de feuille ou de racine, etc.

Les tissus adventifs ont été désignés par Van Tieghem sous les noms de « tissus secondaires » ou de « tissus tertiaires » selon qu'ils se forment au sein d'un tissu primaire ou d'un tissu secondaire. Il y a un grave inconvénient, semble-t-il, à donner un nom différent à des formations homologues parce qu'elles apparaissent dans des tissus d'âge différent. En appliquant au Pissenlit la nomenclature de Van Tieghem, on serait obligé de qualifier de tertiaires les tissus qui, dans la racine, correspondent exactement à ceux qu'il faudrait qualifier de secondaires quelques centimètres plus haut, dans la tige de la même plante.



Anatomie d'une plante à l'époque de la deuxième floraison : Fig. 13. Coupe transversale d'une tige (p. 11). – Fig. 14, 15, 16. Coupes transversales d'une racine (p. 14). - **Anatomie d'une plante âgée de plusieurs années** : Fig. 17. Coupe transversale d'un faux-rameau (p. 15). — Fig. 18. Coupe transversale de la racine (p. 15).

Racine (fig. 14). — La nécrose, produite dans le tissu fondamental interne de la tige par la disparition de la hampe terminale, a atteint quelques cellules ligneuses vers le centre de la racine. Cette nécrose a donné lieu, par réaction, à la formation d'un cambium adventif qui forme ici une zone continue dans le bois secondaire (fig. 15).

Il peut arriver que la zone normale et la zone adventive se joignent en isolant deux ou trois portions du bois secondaire, de façon à constituer des groupes séparés comme dans la tige. Le fonctionnement de ces zones génératrices donne du liber dont les parties les plus vieilles nécrosées se détruisent, ce qui a pour effet de provoquer une division longitudinale dans la racine. La figure 16 représente une coupe passant par une de ces formations.

Plus bas, dans la racine, on peut retrouver la structure normale, identique à celle que nous avons observée dans la racine d'une plante plus jeune.

Continuité des zones cambiales. — L'examen des coupes transversales successives montre que les trois massifs libéro-ligneux de la figure 13 correspondent aux trois rameaux de la plante et que le cambium adventif de la tige se trouve dans le prolongement du cambium normal de ces rameaux.

C. Plante agée de plusieurs années. — *Tige.* — Nous venons de voir que dès la deuxième année, l'apparition du cambium adventif détermine, dans la tige, la formation de plusieurs groupes libéro-ligneux distincts. Chacun de ces groupes possède une zone génératrice propre, en partie normale, en partie adventive. La production du liber est plus active que celle du bois. A la périphérie de chaque anneau libérien se produit une décortication qui a pour effet, à la longue, d'isoler les divers groupes libéro-ligneux.

Lorsqu'elle est vieille, la tige du Pissenlit se partage donc longitudinalement en plusieurs portions plus ou moins cylindriques qui simulent des rameaux. Nous désignerons ces portions sous le nom de « faux-rameaux ». Chacun de ces

faux-rameaux se trouvant en dessous du rameau véritable auquel il correspond, il semble que la ramification commence beaucoup plus bas que dans la plante jeune (1).

La figure 17 représente la coupe d'un de ces faux-rameaux. On y distingue encore six faisceaux de la tige primitive.

Racine. — La coupe reproduite par la figure 18 montre, outre la structure normale d'une racine déjà vieille, une zone cambiale adventive formée au sein du bois secondaire.

Dans cette figure 18, le cambium normal est indiqué par un trait interrompu, le cambium adventif, par un trait pointillé ; le bois secondaire normal est figuré par des hachures, le bois adventif, par un quadrillé ; le liber normal est très développé dans l'écorce ; le liber adventif peu abondant vers le centre.

Le cambium adventif de cette coupe commençait à produire des îlots de liber adventif (fig. 19).

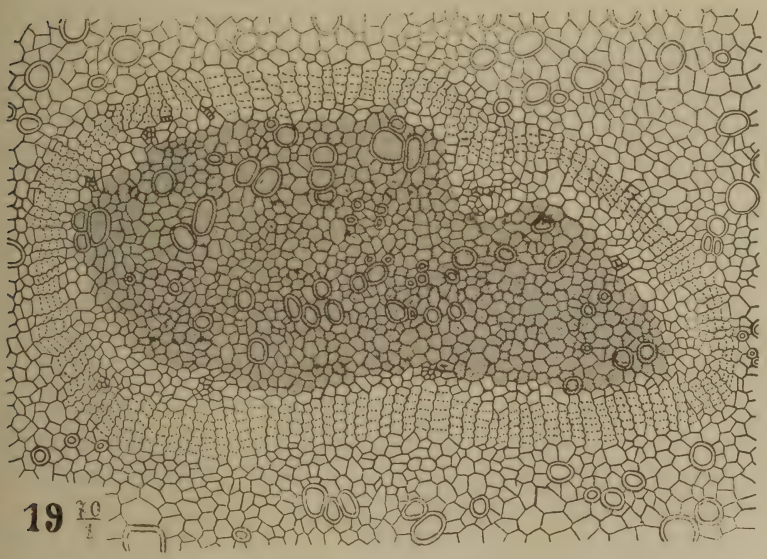
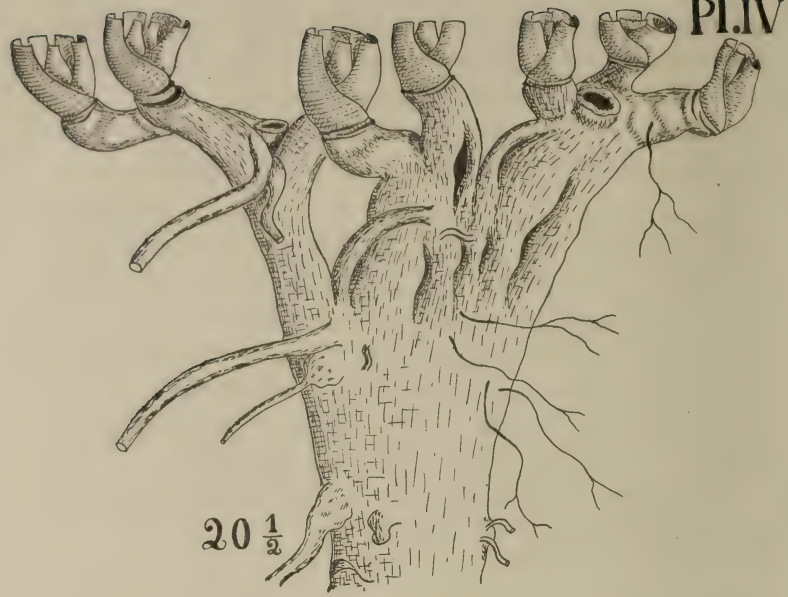
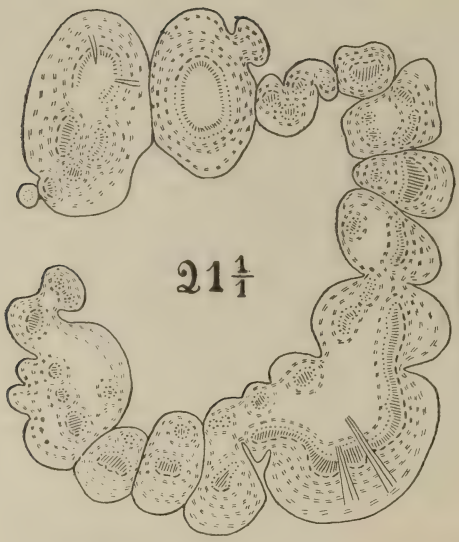


Fig. 19. — Coupe transversale de la racine d'une plante déjà vieille.

(1) On ne peut déterminer l'âge auquel se fait cette division longitudinale ; elle a lieu beaucoup plus tard chez les Pissenlits cultivés parce que le liber produit est beaucoup plus abondant ; les couches de la périphérie se touchent alors et se fusionnent.





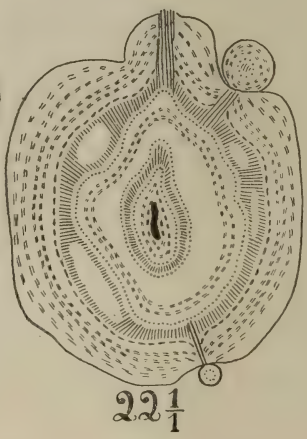


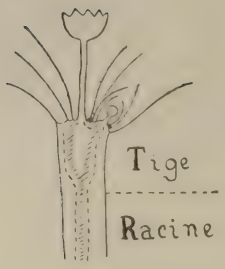
Fig. 20. Plante très vieille (p. 17). — Fig. 21. Coupe transversale de la tige dans la région des faux-rameaux (p. 17). — Fig. 22. Coupe transversale de la racine dans la région des zones cambiales adventives (p. 17).

Il va de soi que la structure tout à fait normale de la racine se retrouve dans les coupes pratiquées plus bas, c'est-à-dire dans la région plus jeune de la racine.

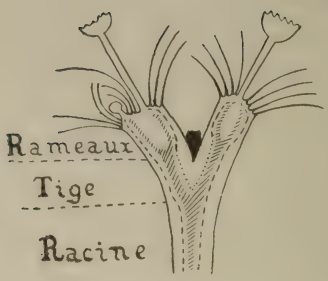
D. Plante très vieille (fig. 20). — *Tige.* — Lorsque la tige du Pissenlit s'est divisée longitudinalement, par suite des nécroses et des décortications qui se sont produites, elle est remplacée par plusieurs portions plus ou moins séparées que nous avons nommées « faux-rameaux ». Au sein de chacun de ceux-ci, les mêmes phénomènes de nécrose, d'apparition de nouveau cambium, de décortication et division longitudinale peuvent se produire. Il en résulte la constitution de faux-rameaux de second ordre. Dans la coupe reproduite par la figure 21, ces faux-rameaux de second ordre ne sont pas encore complètement séparés. Ils sont disposés en deux cercles concentriques irréguliers. Si par la pensée on rejoint les diverses portions de zones cambiales entre elles, on remarquera qu'il y a, à ce niveau, quatre zones génératrices concentriques : celle de la périphérie est la zone normale ; celle de l'intérieur est la zone adventive apparue en premier lieu ; les deux autres sont les deux zones adventives apparues en dernier lieu.

Racine. — Ce que nous venons de dire se montre, en toute évidence, dans une coupe pratiquée dans la racine quelques centimètres au-dessous de la coupe représentée par la figure 21. Cette coupe est dessinée à la figure 22 : on y distingue nettement quatre zones génératrices continues et concentriques. La nécrose qui a séparé les faux-rameaux de second ordre a pénétré jusque dans le bois de la racine qui est maintenant scindé en deux bandes continues et concentriques. Le nouveau cambium adventif s'est étendu de part et d'autre des tissus morts.

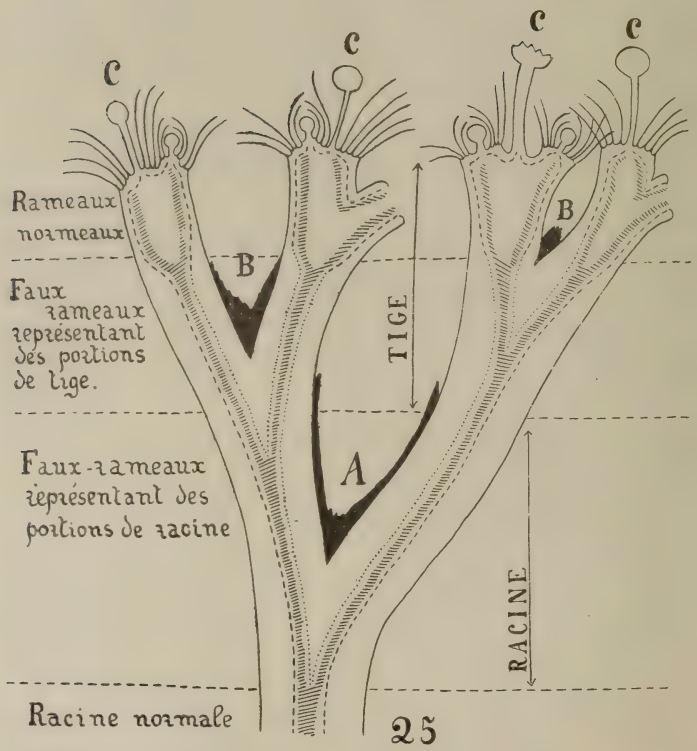
La racine peut aussi se diviser longitudinalement comme la tige. La partie inférieure d'un faux-rameau peut donc être constituée par une partie de vieille racine. En ce cas, la zone génératrice entoure un îlot de bois secondaire, tandis que s'il



23



24



25

Schémas représentant la disposition longitudinale des différents tissus. — Fig. 23. Dans une plante à l'époque de la première floraison (p 19). — Fig. 24. Dans une plante à l'époque de la deuxième floraison (p. 19). — Fig. 25. Dans une plante très vieille (p. 19)

s'agit d'un faux-rameau représentant une partie de tige, la zone génératrice entoure le bois de plusieurs faisceaux. On comprend que cette distinction n'est pas toujours facile à faire quand on examine une très vieille plante.

Schémas. — Les schémas représentés par les figures 23, 24, 25 résument le mode de végétation du Pissenlit : la figure 23 représente la plante à l'époque de la première floraison ; on y voit la hampe terminale A, quelques feuilles et un bourgeon latéral. La limite entre la tige et la racine est marquée par l'absence de moelle dans cette dernière où le centre est occupé par du bois secondaire.

Dans la figure 24, où l'on suppose la plante à l'époque de la deuxième floraison, on voit que la hampe terminale A a disparu; la nécrose (représentée en noir) a pénétré dans la moelle de la tige, mais n'a pas encore atteint le bois de la racine. Un cambium adventif s'est formé le long des tissus nécrosés (en pointillé dans la figure) et a déjà produit du liber adventif. Au sommet, deux rameaux nouveaux se sont formés ayant chacun leur hampe terminale B et quelques feuilles, ainsi que des bourgeons. Ces rameaux présentent les mêmes caractères que la tige principale du schéma de la figure 23.

Dans la figure 25, la nécrose produite par la disparition de la hampe A a pénétré assez bas et a atteint le bois secondaire de la racine ; le cambium adventif a produit du liber dont la décortication a provoqué une division longitudinale en deux faux-rameaux. Les hampes B ont produit, de la même façon que la hampe A, une nécrose qui a pénétré dans la moelle des rameaux et même dans le bois des faux-rameaux de premier ordre; le cambium adventif qui s'est formé a produit du liber dont la décortication a eu pour résultat la division longitudinale en faux-rameaux de second ordre. Des hampes C terminent les tiges normales à l'extrémité de ces faux-rameaux ; elles pourront, à un moment donné, être le point de départ de rameaux de troisième ordre, et ainsi de suite.

Quant aux cicatrices foliaires et aux sommets morts, ils sont

représentés vers la partie supérieure de la plante (en *a*, *b*); les autres, situés plus bas, ont complètement disparu par suite des décortications répétées.

En *résumé*, le Pissenlit se comporte un peu comme les Saules taillés en têtards dont la tête s'évase de plus en plus en se creusant au centre et dont le tronc finalement se partage souvent longitudinalement en plusieurs parties isolées.

Il va de soi que selon l'âge, la vigueur des plantes, les circonstances locales, etc., le nombre, la longueur et le degré de séparation des faux-rameaux sont très variables. Ces faux-rameaux peuvent parfois se séparer incomplètement en restant adhérents dans le haut et dans le bas (fig. 6). Il arrive plus rarement que l'un d'eux s'isole complètement de la plante mère, de façon à constituer une plante indépendante.

NOTE BILIOGRAPHIQUE

Dans un article intitulé : *Sur quelques phénomènes déterminés par l'apparition tardive d'éléments nouveaux dans les tiges et les racines des Dicotylédones* (thèse présentée à la Faculté des sciences de Bordeaux, en 1879), M. G. Dutailly a mentionné le Pissenlit : Il rappelle les observations du célèbre botaniste de Bary concernant la faible production du bois secondaire dans la racine et le grand développement du liber (p. 24). Il signale la présence de deux et même trois zones concentriques cambiales dans la racine (p. 40); il observe une lacune qui a provoqué la formation d'un cambium à côté des tissus nécrosés, c'est-à-dire en dedans du massif ligneux. Il mentionne également la réunion d'une zone cambiale nouvelle à la zone normale et le fonctionnement commun des deux zones (pp. 46, 47).

Mais l'auteur ne paraît pas avoir constaté que le point de départ de la nécrose, c'est la disparition de la hampe terminale. Son attention s'est portée sur des nécroses isolées, et « accidentelles » (p. 47) qu'il appelle « canaux sécréteurs » ; mais il néglige le gros massif ligneux, isolé par la zone cambiale, qui est un fait habituel et constant chez le Pissenlit. Les figures 2,

4, 5, 6 de la planche IV indiquent d'ailleurs qu'il s'agit d'une tige et non d'une racine, comme le croit l'auteur. Celui-ci n'a pas fait remarquer non plus que ce massif ligneux n'est qu'une partie de la tige et que le fonctionnement des zones cambiales produit un liber dont la décortication provoque des divisions longitudinales et la séparation des portions que nous avons appelées « faux-rameaux ».

III. — EXPÉRIENCES.

J'ai eu l'occasion de faire aussi quelques expériences qui se rapportent aux observations anatomiques qui viennent d'être exposées.

1. *Allongement des tiges.* — Le Pissenlit est l'une des plantes qui semble le mieux mériter le qualificatif « acaule » que les anciens botanistes prodiguaient bien à tort. Pour mettre en évidence les tiges du Pissenlit, il suffit cependant de recouvrir une plante, pendant l'hiver, d'une couche de 20 centimètres de terre. Dès le printemps, les bourgeons se développent en tiges grêles, à longs entre-nœuds, garnies de feuilles rudimentaires en forme d'écailles pointues (fig. 26). Ces tiges traversent rapidement la couche de terre et arrivent au niveau du sol. Elles produisent alors des feuilles normales rapprochées les unes des autres (fig. 28 et 29). Ces tiges ascendantes sont faciles à reconnaître extérieurement, leur structure est également bien caractérisée (fig. 27). Elles ne tardent pas à s'épaissir, à se tubériser et à présenter l'organisation que présente la tige du Pissenlit ordinaire. Chaque sommet produit une hampe terminale puis des bourgeons latéraux qui, durant l'année suivante, provoqueront la ramification et la constitution d'une rosette de feuilles serrées.

Lorsqu'elles sont suffisamment âgées, les tiges ascendantes se décortiquent et plus rien ne peut les distinguer des tiges normales si peu reconnaissables extérieurement chez le Pissenlit.

Fig. 26. Tige allongée, grêle, à son premier état de développement (p. 21). — Fig. 27. Structure anatomique de cette même tige (p. 21). — Fig. 28, 29. Tiges allongées ayant produit une rosette de feuilles rapprochées les unes des autres (p. 21). — Fig. 30. Formation de deux tiges adventives (p. 23).

Des plantes retournées la tête en bas, d'autres placées horizontalement à une certaine profondeur ont produit également des tiges ascendantes, grêles, à longs entre-nœuds.

2. *Membres adventifs.* — Le Pissenlit produit très facilement non seulement des racines adventives, mais aussi des bourgeons adventifs, et cela sur ses racines aussi bien que sur ses tiges. Pour provoquer l'apparition des bourgeons adventifs, il suffit de supprimer soit le sommet de la plante, soit toutes ses tiges. Les tiges nées de ces bourgeons adventifs, ayant à traverser rapidement une couche de terre plus ou moins épaisse, se comportent comme les tiges ascendantes dont nous venons de parler. La figure 30 nous montre deux de ces tiges portant chacune, actuellement, une rosette de feuilles et une jeune hampe.

3. *Cicatrisation.* — Les sections et autres blessures faites à un Pissenlit se cicatrisent aisément dans le sol. On peut même déchirer longitudinalement les organes souterrains en plusieurs morceaux et les recouvrir de terre. Les tissus mis à nu sont bientôt nécrosés, et en dessous d'eux, une zone cambiale adventive prend naissance par recloisonnement de cellules vivantes. La zone génératrice nouvelle fonctionne comme il a été expliqué dans la première partie de ce travail, en produisant du bois secondaire et du liber secondaire. Ce dernier, en se subérisant à la surface, produit une cicatrisation si parfaite qu'après quelque temps il ne reste plus de traces de la blessure ou de la déchirure.

Résumé et conclusions.

Le mode de végétation du Pissenlit constitue un cas assez spécial : la ramification est sympodique ; les hampes sont terminales, et les sommets sont successivement remplacés par un ou deux bourgeons latéraux. Chaque année, après la floraison, les parties souterraines subissent une décortication qui

enlève les cicatrices foliaires ainsi que celles des bourgeons morts ; on ne peut donc déterminer l'âge d'un Pissenlit vieux. La disparition des hampes florifères est le point de départ d'une nécrose qui pénètre jusque dans le bois secondaire de la racine. Cette nécrose provoque la formation d'un cambium adventif. Celui-ci est situé du côté interne des faisceaux de la tige ; il ne tarde pas à les contourner, à rejoindre la zone normale et à isoler un certain nombre de massifs ligneux. Chacun d'eux correspond à un rameau. Dans la racine, le cambium adventif forme souvent une zone continue à l'intérieur de la zone cambiale normale. Il arrive aussi qu'il rejoint la zone normale en isolant des portions de bois secondaire.

Les zones cambiales nouvelles fonctionnent comme les zones normales, c'est-à-dire qu'elles produisent du liber dont les couches externes tombent à la fin de l'été par décortication, ce qui produit une division longitudinale dans la tige aussi bien que dans la racine.

La structure interne, pas plus que les caractères extérieurs, ne permet de déterminer l'âge exact de la plante : le bois secondaire, en effet, ne forme jamais de masse volumineuse parce qu'il est subdivisé à diverses reprises ; le liber ne vit jamais plus d'un an. Un Pissenlit ne grossit pas ; on remarque, en effet, que dans des conditions identiques, les organes souterrains adultes conservent sensiblement le même diamètre ; celui-ci varie, au contraire, avec le milieu ; c'est ainsi que dans un terrain fertile, ces plantes deviennent très grosses par la formation d'un liber abondant.

Le Pissenlit est une plante capable de supporter les plus mauvais traitements. Il peut être enfoncé à une grande profondeur : les bourgeons se développent en tiges à entre-nœuds très longs qui portent le sommet au niveau du sol où il reprend la végétation normale. La plante peut être décapitée, mutilée, déchirée longitudinalement : le cambium adventif cicatrise aussitôt les blessures ; des bourgeons adventifs se développent, produisent des tiges qui continuent la végétation, un moment interrompue.

TABLE DES MATIÈRES

I. — CARACTÈRES EXTÉRIEURS 5

A. — Plante à l'époque de la première floraison 6

B. — Plante à l'époque de la deuxième floraison. . . 8

C. — Plante âgée de plusieurs années 8

D. — Plante très vieille 9

II. — ANATOMIE 9

A. — Plante à l'époque de la première floraison 9

B. — Plante à l'époque de la deuxième floraison 11

C. — Plante âgée de plusieurs années 14

D. — Plante très vieille 17

III. — EXPÉRIENCES. 21

1. Allongement des tiges 21

2. Membres adventifs 23

3. Cicatrisation 23

Résumé et conclusions. 23

OBSERVATIONS ANATOMIQUES

ET PHYSIOLOGIQUES

SUR LE

CRINUM CAPENSE HERB.

PAR

R. BEAURIEUX

DOCTEUR EN SCIENCES BOTANIQUES

BRUXELLES

HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

Rue de Louvain, 112

—

1914

INTRODUCTION

Le *Crinum Capense* Herb., encore appelé *Crinum longifolium* Thunb. ou *Amaryllis longifolia* L., appartient à la famille des Amaryllidées. Cette plante est originaire du cap de Bonne-Espérance. Chez nous elle est cultivée en pleine terre et résiste bien aux intempéries de notre climat. Elle fleurit abondamment pendant la dernière quinzaine de juin et le commencement de juillet. Ses fruits mûrissent dans le courant du mois d'août. Ils contiennent un nombre variable de graines qui ont un albumen charnu, contenant des corps chlorophylliens et beaucoup de suc cellulaire. Quand les fruits mûrissent, leur péricarpe s'amincit progressivement, et finalement se déchire mettant ainsi les graines en liberté. Ces dernières tombent sur le sol sans pouvoir y pénétrer. Elles germent néanmoins quelques jours après, même si la terre est sèche et s'il ne pleut pas. Le cotylédon s'allonge ordinairement beaucoup en cherchant à s'enfoncer dans le sol. La racine principale, au contraire, ne se développe que si le cotylédon est parvenu à s'implanter dans un substratum suffisamment humide.

La germination du *Crinum Capense* se produit donc dans

des conditions incompatibles avec celles de la germination des graines en général. C'est ce qui m'a décidé à soumettre ce phénomène à une observation attentive. Après avoir étudié l'anatomie des graines mûres et celle des plantules, j'ai fait des expériences sur la pollinisation, l'influence de divers agents sur la germination, le siège de la croissance et du géotropisme du cotylédon, le rôle des stomates situés sur le suçoir.

Liége, Institut botanique, le 20 juillet 1914.

OBSERVATIONS ANATOMIQUES

ET PHYSIOLOGIQUES

SUR LE

CRINUM CAPENSE Herb.

HISTORIQUE

Les graines du *Crinum Capense* ont souvent été qualifiées de bulbiformes. C'est qu'autrefois, en effet, on leur avait attribué la valeur d'un petit bulbe; mais dès 1824, Achille Richard [1] avait déjà reconnu que ces prétendus bulbilles étaient réellement des graines.

Prilleux [2] découvrit quelques-unes des particularités que présentent les ovules et les graines de la plante qui nous occupe, et il vit, notamment, que les ovules sont entièrement dépourvus de téguments. Il constata qu'un grand nombre

---

[1] Ach. Richard, Observations sur les prétendus bulbilles qui se développent à l'intérieur de quelques *Crinum*. (*Ann. des sciences naturelles*, 1re série, t. II, p. 12.)

[2] Prilleux, De la structure et du mode de formation des graines bulbiformes de quelques Amaryllidées. (*Ann. des sciences naturelles*, 4e série, vol. IX, p. 97.)

d'ovules ne se développent pas, mais il crut que ces ovules sont cependant fécondés. Si tant de graines restent rudimentaires, c'est par suite de cette loi générale du balancement organique qui condamne à l'atrophie les organes voisins de ceux qui prennent un développement excessif. Quant à la pellicule sèche qui entoure les graines à leur maturité, Prilleux pense qu'elle représente un reste du nucelle, mais il n'en donne pas la démonstration.

Alex. Braun (1) reconnut que dans les *Hymenocallis* la partie charnue de la graine représente le tégument externe de l'ovule considérablement hypertrophié. Dans les *Crinum,* au contraire, la partie charnue est constituée par un albumen très volumineux dont les cellules contiennent beaucoup de suc cellulaire.

Il existe cependant des ovules qui se transforment réellement en bulbilles. Chez le *Calostemma Cunninghami,* Baillon (2) a constaté la formation d'un bourgeon allongé implanté au fond du sac embryonnaire; les téguments ovulaires et le nucelle forment les tuniques de cette sorte de bulbe. Une racine adventive prend naissance dans le plateau correspondant à la région chalazienne. Ce cas n'a rien de commun avec celui du *Crinum* que nous allons envisager.

---

(1) Alex. Braun, Mémoire sur les graines charnues des Amaryllidées. (*Ann. des sciences naturelles,* 4e série, vol. XIV, p. 5.)

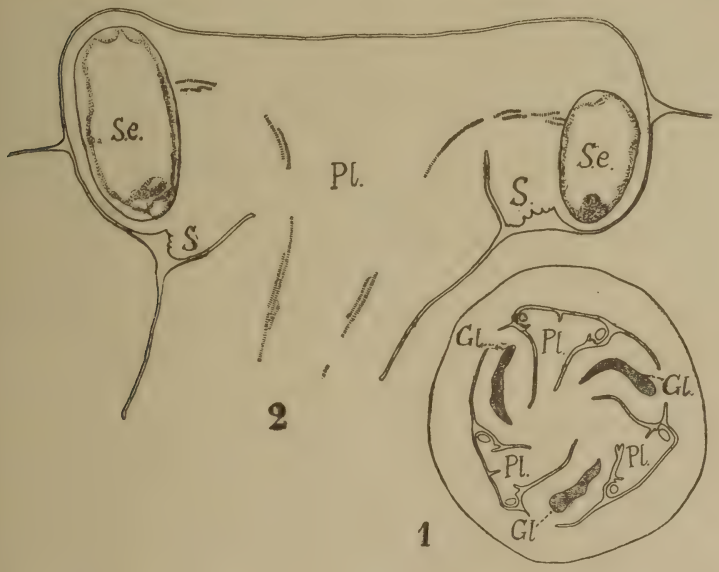
(2) Baillon, Recherches sur le développement et la germination des graines bulbiformes des Amaryllidées. (*Association française pour l'avancement des sciences.* Congrès de Lyon, 1873.)

CHAPITRE PREMIER

ANATOMIE

§ 1er — L'ovaire et le fruit.

L'ovaire renferme trois loges (fig. 1) qui, à l'époque de la floraison, sont complètement occupées par d'énormes placentas et par les ovules disposés sur deux rangs dans chaque loge. Dans l'épaisseur de chaque cloison existe une glande septale (fig. 1).



Ovaire et ovules. — Fig. 1 : Section transversale d'un ovaire (Pl. = placenta ; Gl. = glande septale). — Fig. 2 : Un placenta et deux ovules grossis davantage (Pl. = placenta ; S. e. = sac embryonnaire ; S. = saillies couvrant la route des tubes polliniques).

Les ovules ne possèdent ni primine ni secondine. Dans le voisinage de la région correspondant au micropyle, le funicule porte des saillies qui couvrent la route que suivront les tubes polliniques (fig. 2). Vers la fin de la floraison, le sac embryonnaire occupe déjà la majeure partie de l'ovule; le nucelle est réduit à trois ou quatre assises de cellules en voie d'écrasement. Après la floraison, l'ovaire grossit rapidement : les cloisons se résorbent, les ovules se développent, les placentas et le péricarpe deviennent plus épais.

Quand le fruit commence à mûrir, le péricarpe s'amincit, se ride et se dessèche graduellement; à la maturité, il n'en reste qu'une mince pellicule qui se déchire et met ainsi les graines en liberté.

Les fruits renferment un nombre très variable de graines. Souvent on n'en compte que deux ou trois, parfois même une seule; dans d'autres cas, on peut en trouver de quinze à vingt et même davantage. Leur grosseur est également fort variable : lorsqu'il n'y a qu'une graine dans un fruit, elle est excessivement volumineuse (diamètre : 30 à 35 millimètres); quand il y en a plusieurs, elles sont d'autant plus petites que leur nombre est plus grand.

On remarque alors que quelques-unes d'entre elles sont assez grosses, tandis que les autres sont beaucoup plus petites; leur diamètre est de 5 à 20 millimètres.

Nous verrons plus loin qu'en opérant une pollinisation artificielle, au moyen d'une grande quantité de pollen, on obtient des fruits contenant une quarantaine de petites graines.

Chaque graine se compose d'un albumen volumineux et d'un embryon qu'il est assez facile d'isoler.

L'albumen est charnu, aqueux; les réserves alimentaires se trouvent à l'état dissous dans le suc cellulaire. Dans les cellules il y a d'assez nombreux corps chlorophylliens très petits. La fonction élaboratrice de ces derniers ne semble pas être très active : les graines maintenues à l'obscurité donnent en effet des plantules aussi robustes que celles qui ont germé à la lumière.

La surface de l'albumen est constituée par une mince pellicule sèche, subérisée. Après la fécondation, l'ovule grossit fortement, le nucelle se déchire, s'effrite et disparaît. L'albumen est alors mis à nu, mais les cellules de la périphérie se recloisonnent, subérisent leurs parois. La graine continuant à grossir, le suber déjà formé se fendille; il s'en produit alors un nouveau, auquel succède encore un autre. Ces phénomènes se répètent, jusqu'à ce que la graine a atteint son volume définitif. La pellicule qui l'entoure à sa maturité, appartient donc à l'albumen et non pas au nucelle : il n'y a pas de spermoderme. L'étude de l'embryon dans la graine mûre est réservée au paragraphe suivant.

§ 2. — L'embryon dans la graine mûre.

Dans la graine mûre, l'embryon mesure de 5 à 10 millimètres environ de longueur. Il est à peu près cylindrique : l'une de ses extrémités est conique et correspond à la pointe de la radicule; l'autre extrémité, plus arrondie, est le sommet du cotylédon. L'embryon est plus ou moins arqué et orienté de telle façon que la radicule est dirigée vers la face où se trouve le hile (fig. 3). Des coupes longitudinales montrent que l'hypocotyle est très court; que le cotylédon est au contraire très long; qu'il y a en outre l'ébauche de deux feuilles recouvertes par la gaine du cotylédon (fig. 10 et 11, voyez p. 12).

Coupes transversales :

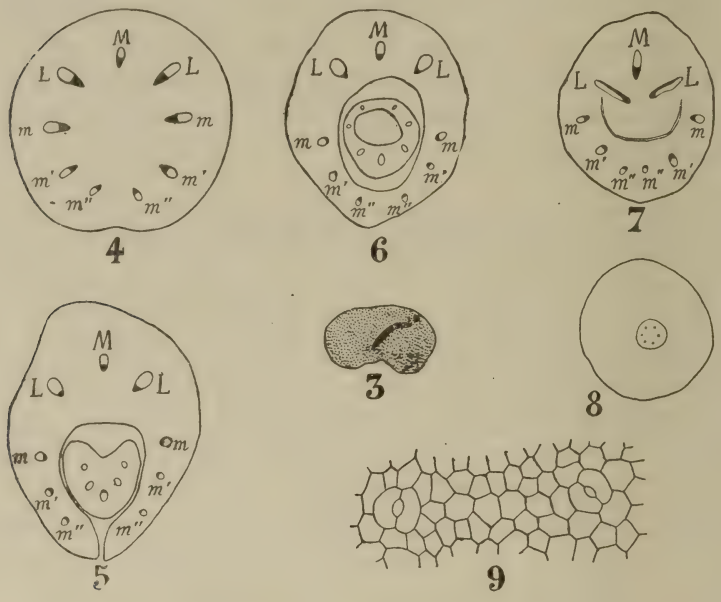
1. Une section pratiquée vers le milieu du cotylédon montre une structure déjà notablement différenciée :

Neuf faisceaux montrant une ou plusieurs trachées et le liber nettement reconnaissables (fig. 4). Parenchyme méatique à grandes cellules contenant beaucoup de suc cellulaire. Épiderme avec de rares stomates complètement formés.

2. Le sommet du cotylédon est arrondi en forme de calotte. Il est garni de nombreux stomates tous ouverts (fig. 9). Les

cellules stomatiques sont presque aussi grandes que dans les plantules âgées de deux ou trois mois.

3. La gaine cotylédonaire est très courte; elle est close et recouvre les feuilles 1 et 2 (fig. 6). Celles-ci sortiront plus tard en élargissant l'étroite fente qui existe entre la gaine et le limbe (fente cotylédonaire) (fig. 5).



Embryon dans la graine mûre. — Fig. 3 : Coupe de la graine montrant l'embryon au sein de l'albumen. — Fig. 4 : Section transversale vers le milieu du cotylédon. — Fig. 5 : Section au niveau de la fente cotylédonaire. — Fig. 6 : Section au niveau de la gaine du cotylédon. — Fig. 7 : Section au niveau du nœud cotylédonaire. — Fig. 8 : Section de la radicule. — Fig. 9 : Épiderme du suçoir.

4. Au nœud cotylédonaire (fig. 7), on retrouve les neuf faisceaux dont six déjà sortis et trois autres L M L au niveau même de leur sortie.

5. L'hypocotyle est très court et encore au stade procambial.

6. La racine principale contient un seul massif central de procambium; on y reconnaît vaguement six pôles ligneux dont le développement sera centripète (fig. 8).

Coupes longitudinales.

Deux principalement sont à considérer :

I. La coupe longitudinale passant par le plan de symétrie de l'embryon, montre les régions suivantes (fig. 10) :

1. L'hypocotyle, extrêmement court;

2. La radicule contenant les histogènes du faisceau, du parenchyme cortical et de la coiffe;

3. La région située entre le nœud cotylédonaire et la fente cotylédonaire (c'est-à-dire la gaine du cotylédon) : elle renferme le sommet végétatif de la tige principale, la feuille[1] dont le sommet est déjà dirigé vers la fente, et la feuille[2];

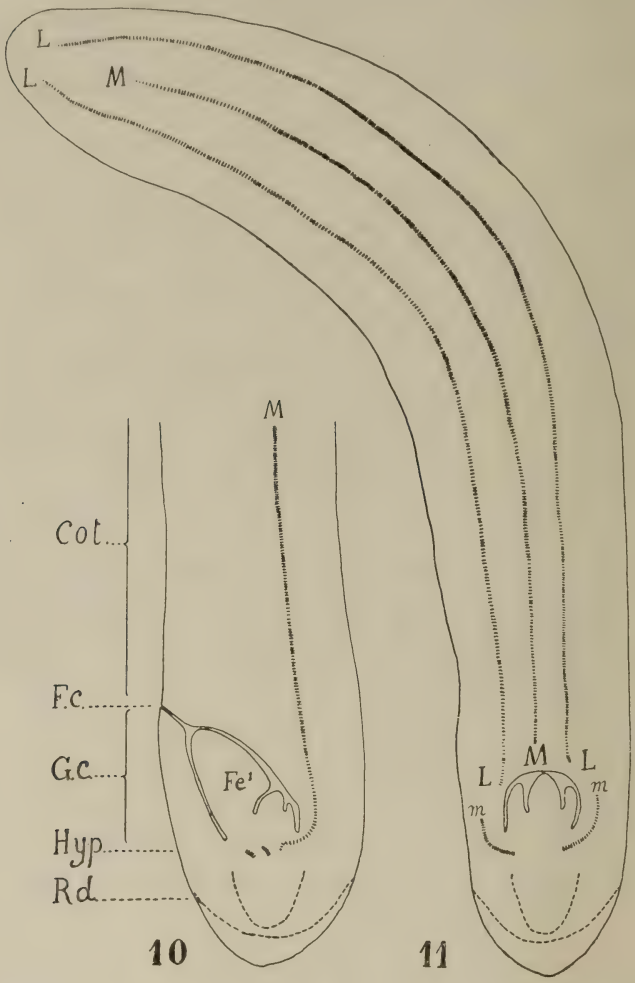
4. Le corps cotylédonaire, très développé, est cylindrique.

II. La coupe longitudinale perpendiculaire au plan de symétrie, rencontre les mêmes régions; la fente cotylédonaire évidemment n'est pas visible (fig. 11). Par contre, on remarque les trois faisceaux principaux qui aboutissent au sommet et se terminent en pointe libre.

Les coupes longitudinales successives, comme d'ailleurs les coupes transversales, montrent clairement qu'il y a au sommet du cotylédon des stomates nombreux, rapprochés les uns des autres, bien visibles, et qu'ils sont déjà largement ouverts. Partout ailleurs, sur le cotylédon, les stomates sont rares.

L'embryon observé dans la graine mûre, est remarquable par ses dimensions qui dépassent de beaucoup celles de la plupart des embryons monocotylés; par le grand nombre de faisceaux cotylédonaires; par le haut degré de différenciation des tissus : faisceaux avec trachées complètement formées, cellules du parenchyme grandes, contenant beaucoup d'ami-

don, et laissant entre elles des méats pleins d'air; stomates entièrement conformés avec fente ouverte.



Embryon dans la graine. — Fig. 10 : Coupe longitudinale suivant le plan de symétrie de l'embryon. — Fig. 11 : Coupe longitudinale perpendiculaire à la précédente. (Cot. = cotylédon; F. c. = Fente cotylédonaire; G. c. = Gaine du cotylédon; Hyp. = Hypocotyle; Rd. = Radicule; Fe¹ = première feuille.)

§ 3. — Structure des plantules.

Caractères extérieurs.

La figure 12 représente une plantule âgée de deux mois et demi. On y remarque un bulbe allongé (4 centimètres environ de longueur et 5 millimètres de diamètre). Ce bulbe est recouvert par la gaine du cotylédon ; il est surmonté du corps cotylédonaire qui n'est que partiellement visible, sa partie supérieure restant toujours emprisonnée dans l'albumen. (Cette partie supérieure du cotylédon est indiquée en pointillé dans la figure 12.)

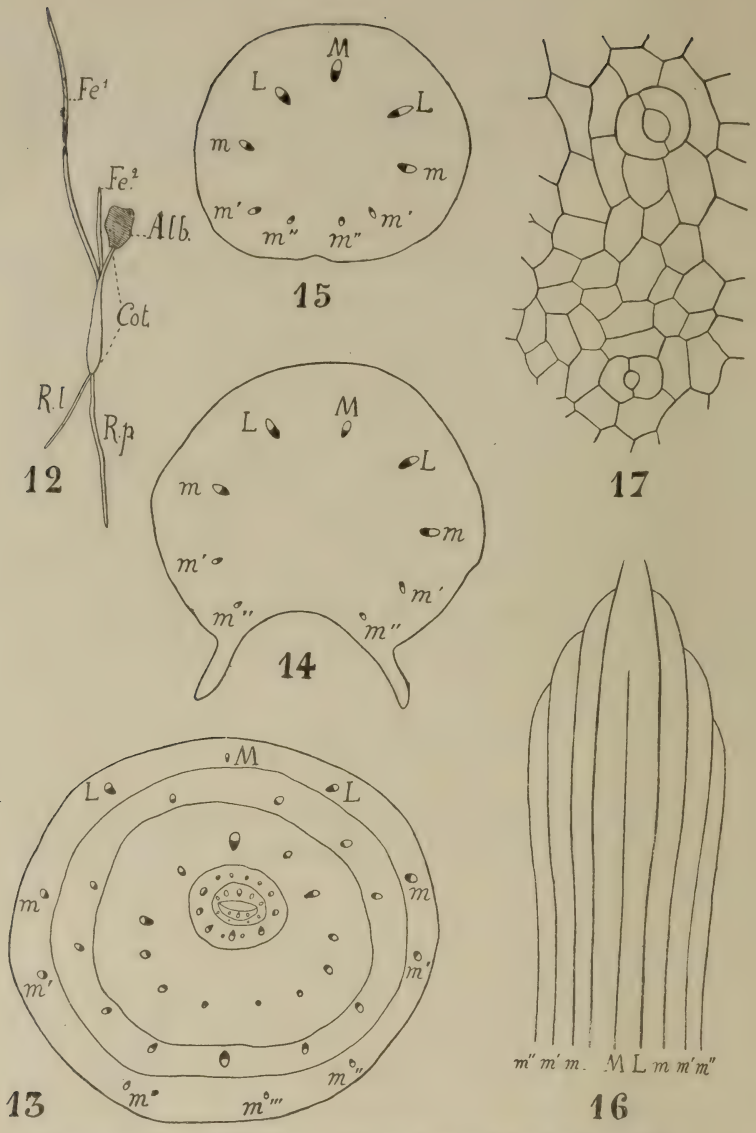
La feuille[1] entièrement développée et la feuille[2] en voie d'allongement sortent du bulbe. L'hypocotyle est tellement court qu'il ne se reconnaît pas extérieurement. Outre la racine principale, une racine latérale est déjà assez développée. La figure 12 montre aussi la graine flétrie, mais non encore complètement vidée.

Caractères anatomiques.

Une section transversale, pratiquée tout à la base du bulbe (fig. 13), montre que la gaine cotylédonaire contient dix faisceaux :

$$m'' \, m' \, m \, \mathrm{L} \, \mathrm{M} \, \mathrm{L} \, m \, m' \, m'' \, m'''.$$

Ces faisceaux s'élèvent parallèlement dans toute la longueur de la gaine, puis se rapprochent un peu et passent tous dans le corps cotylédonaire sauf le petit faisceau m''' (fig. 14). Plus haut, vers le milieu de la région libre du cotylédon, la coupe est presque circulaire, présentant pourtant un petit sillon médian à la face interne. Les neuf faisceaux sont disposés en cercle (fig. 15). La région emprisonnée dans la graine montre la même structure jusqu'à un niveau très rapproché du sommet du cotylédon. Dans la partie supérieure du suçoir, la plupart des faisceaux s'anastomosent de la manière représentée par la figure 16.



Plantules. — Fig. 12 : Plantule âgée de deux mois et demi $(\frac{1}{3})$. — Fig. 13 : Section transversale du bulbe montrant la gaine du cotylédon et celles des premières feuilles. — Fig. 14 : Section au niveau de la fente cotylédonaire élargie — Fig. 15 : Section vers le milieu de la partie libre du cotylédon. — Fig. 16 : Parcours des faisceaux dans l'extrémité supérieure du cotylédon. — Fig. 17 : Épiderme du suçoir.

HISTOLOGIE

A. *Le cotylédon.* — Les faisceaux du cotylédon sont d'inégale grosseur : le M n'est pas le plus fort, souvent même il est très petit; les deux L sont gros; les *m*, *m'*, *m''* sont de taille décroissante.

Le parenchyme ne présente rien de particulier. L'épiderme montre de rares stomates sur la partie libre du cotylédon; ils sont plus nombreux sur sa portion terminale enfermée dans l'albumen; à son sommet leur nombre est encore beaucoup plus grand.

Ces stomates quoique restant au contact de l'albumen sont parfaitement différenciés et largement ouverts (fig. 17). Il ne semble pas cependant qu'ils puissent livrer passage à des gaz, ni servir à la respiration ou à la transpiration. Il y aura donc lieu de rechercher par des expériences dont il sera rendu compte plus loin, s'ils ne sont pas des organes absorbants.

Il est à remarquer aussi que le cotylédon ne se termine pas par un suçoir renflé comme on en voit dans les genres *Phoenix*, *Tradescantia*, etc. Le cotylédon se termine simplement par une calotte hémisphérique sur laquelle les stomates sont plus rapprochés que partout ailleurs (dix stomates environ par millimètre carré). Les cellules épidermiques de la gaine et de la partie aérienne ont une cuticule épaisse. Celles de la partie emprisonnée à l'intérieur de l'albumen ont une cuticule plus mince. Quant à la forme des cellules épidermiques, elle est partout sensiblement la même; il n'y a pas de cellules prolongées en papilles, comme on en a décrit à la surface de certains suçoirs cotylédonaires. Cette absence de papilles absorbantes semble confirmer l'idée que les produits de la digestion de l'albumen sont réellement absorbés par les stomates.

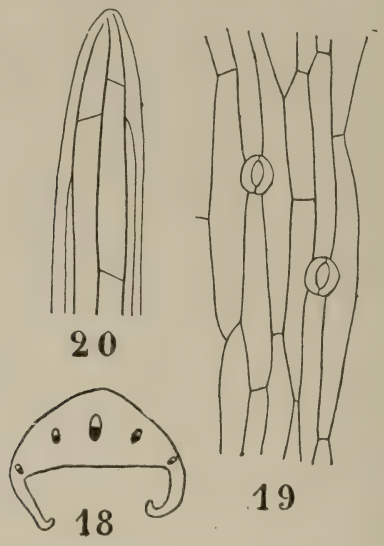
B. *Les feuilles.* — La feuille qui se développe après le cotylédon possède aussi une longue gaine et un limbe, ce dernier

atteignant une douzaine de centimètres de longueur. La gaine contient onze faisceaux (fig. 13) :

$$m'' \; m' \; m \; \mathrm{L} \; i \; \mathrm{M} \; i \; \mathrm{L} \; m \; m' \; m''.$$

Ces faisceaux courent parallèlement dans toute la longueur de la gaine, mais leur nombre se réduit à neuf puis à sept.

La coupe transversale du limbe de cette feuille montre cinq faisceaux (fig. 18). Les stomates ont la même forme que ceux qui se trouvent sur le cotylédon (fig. 19).



Première feuille d'une plantule. — Fig. 18 : Coupe transversale du limbe de la première feuille. — Fig. 19 : Épiderme de cette feuille. — Fig. 20 : Terminaison des faisceaux au sommet du limbe.

La terminaison des faisceaux au sommet de la feuille (fig. 20) montre que les deux faisceaux marginaux *m* se jettent sur les L. Vers le sommet il n'y a donc que trois faisceaux qui se terminent sans s'anastomoser. Le médian se termine par quelques trachées élargies; les latéraux se terminent par une seule trachée.

Dans la feuille[2] il y a douze ou quatorze faisceaux. La feuille[3] en contient au moins quatorze dans la gaine :

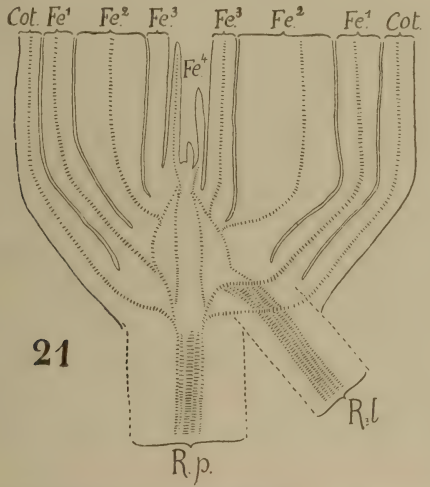
$$m''' \; m'' \; m' \; m \; \mathrm{L} \; i \; \mathrm{M} \; i \; \mathrm{L} \; m \; m' \; m'' \; m''' \; m''''.$$

C. *La racine principale.* — Son faisceau contient six pôles. Ce faisceau ne présente rien de particulier au point de vue histologique ; le parenchyme cortical non plus.

D. *La racine latérale* contient huit pôles.

E. *L'hypocotyle.* — Nous savons déjà que l'hypocotyle n'est pas reconnaissable extérieurement, tellement il est court (1).

Pour résumer ce qui précède, il convient de jeter un coup d'œil sur la figure 21 qui représente schématiquement la coupe



Coupe longitudinale schématique d'une plantule. — Fig. 21 : Cot. = cotylédon ; fe. 1, 2, 3, 4 = les quatre premières feuilles ; R. p. = Racine principale ; R. l. = racine latérale.

(1) Dans un mémoire intitulé : *Recherches anatomiques et éthologiques d'embryologie végétale,* M. le Prof. A. Gravis a fait une étude détaillée de l'hypocotyle et de la région dans laquelle s'établit le contact entre les faisceaux cotylédonaires et le cylindre central de la racine. Il a comparé la structure de cette région à celle de diverses autres Monocotylées.

longitudinale d'une plantule. Ce dessin a été exécuté d'après la série complète des coupes transversales successives pratiquées dans la plantule qui a fait l'objet de la description précédente. Cette coupe nous montre l'insertion du cotylédon et de cinq feuilles; leur emboîtement constitue le bulbe. C'est dans la gaine de la feuille ^{2}, la plus épaisse en ce moment, que les réserves alimentaires et l'eau se sont déposées en majeure partie. Les gaines des feuilles ^{3}, ^{4}, ^{5}, etc., s'épaissiront ultérieurement et deviendront le siège des substances qui seront élaborées plus tard. Au-dessous du méristème de la tige, on reconnaît les faisceaux qui sortent dans les feuilles. (Ils sont représentés par des hachures.) Tout en bas, la racine principale est reconnaissable à partir du nœud cotylédonaire, tandis qu'une racine latérale est insérée au nœud ^{1}.

Variation de la structure des plantules.

Les diverses plantules que nous avons examinées n'étaient pas entièrement semblables; elles différaient assez notablement par le nombre des faisceaux cotylédonaires et par le nombre des pôles de la racine principale. Ces variations proviennent d'une vigueur différente des plantules.

Le poids des graines est très variable; les dimensions de l'embryon varient du simple au double. Il en résulte que, placées dans des conditions semblables, les plantules prennent un développement différent.

CHAPITRE II

PHYSIOLOGIE

§ 4. — Observations sur la pollinisation.

Nous avons vu précédemment que les fruits provenant de fleurs pollinisées naturellement peuvent renfermer un nombre très variable de graines. Certains fruits ne contiennent qu'une seule graine, d'autres en renferment un petit nombre, d'autres encore une dizaine, une vingtaine, parfois même davantage. D'une façon générale, les graines sont d'autant plus volumineuses qu'elles sont moins nombreuses dans un même fruit.

Le nombre de graines que peut porter une même plante varie aussi très notablement d'une année à une autre. D'ordinaire, la plupart des fruits ne contiennent que peu de graines, et celles-ci sont très grosses. D'autres années, la plupart des fruits renferment des graines plus nombreuses mais de médiocre grosseur : dans certains fruits, alors, on peut compter plus de cinquante graines de petite taille (1). Voici quelques indications à titre d'exemples :

Fruit contenant	1	graine	pesant	15gr25
—	10	graines	pesant en moyenne . .	5,46
—	23	—	— . .	3,77
—	40	—	— . .	2,53
—	52	—	— . .	1,25

Il est à noter aussi que dans un même fruit se trouvent souvent une ou deux grosses graines, un nombre variable de graines de moyenne grosseur, et généralement plusieurs graines

(1) Dans les trois loges d'un ovaire de *Crinum Capense,* il y a généralement quatre-vingt-dix ovules.

fort petites. A ces dernières on peut appliquer la loi du balancement organique invoquée par Prilleux (voir Historique, p. 6). Mais nous pensons que les ovules qui avortent complètement n'ont pas été fécondés.

Si nous délaissons ce point spécial pour nous occuper seulement des variations du nombre de graines, nous sommes amenés à nous demander comment s'opère la pollinisation. Nous remarquerons d'abord que toutes les fleurs sont fortement penchées par suite de la courbure du tube du périanthe, que les filets des étamines sont courbés de façon à ramener les anthères vers le haut et que le style lui-même est dirigé de façon que le stigmate vient se placer obliquement en dessous des étamines (fig. 22). Une telle disposition rend possible la pollinisation directe à la suite d'une secousse. En effet, en secouant la hampe florale, on peut voir tomber du pollen sur le stigmate. Il y a lieu de faire remarquer que si le pollen est mis en liberté sans que la hampe soit secouée, il ne tombe

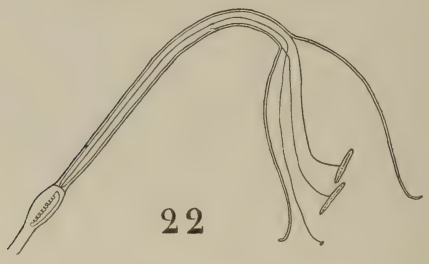


Fig. 22. — Fleur coupée longitudinalement $\left(\frac{1}{3}\right)$.

pas sur le stigmate; l'intervention du vent ou d'un autre agent agissant de même, est donc nécessaire. Mais quelle relation y a-t-il entre ce mode de pollinisation et la variabilité du nombre de graines? Pour être utile la secousse qui projette le pollen doit être faite au moment où le stigmate est nubile. Tout le pollen qui tombe sur le stigmate n'est pas efficace; une grande partie n'y reste pas adhérente parce qu'il ne retient le pollen que lorsque sa surface est visqueuse, ce qui arrive à l'époque à laquelle il est nubile. Il faudra donc que pendant

la courte période durant laquelle la fécondation peut être réalisée, le vent souffle assez violemment pour provoquer la chute du pollen. Dès lors, en prenant en considération, d'une part, que les fleurs s'épanouissent les unes après les autres; et, d'autre part, que les agents atmosphériques (surtout le vent) n'agissent pas toujours avec une égale efficacité, on comprend, aisément, que la quantité de pollen qui tombe sur le stigmate au moment propice puisse être variable d'une fleur à l'autre, et que, par conséquent, le nombre d'ovules fécondés soit différent d'un ovaire à l'autre, et parfois très petit.

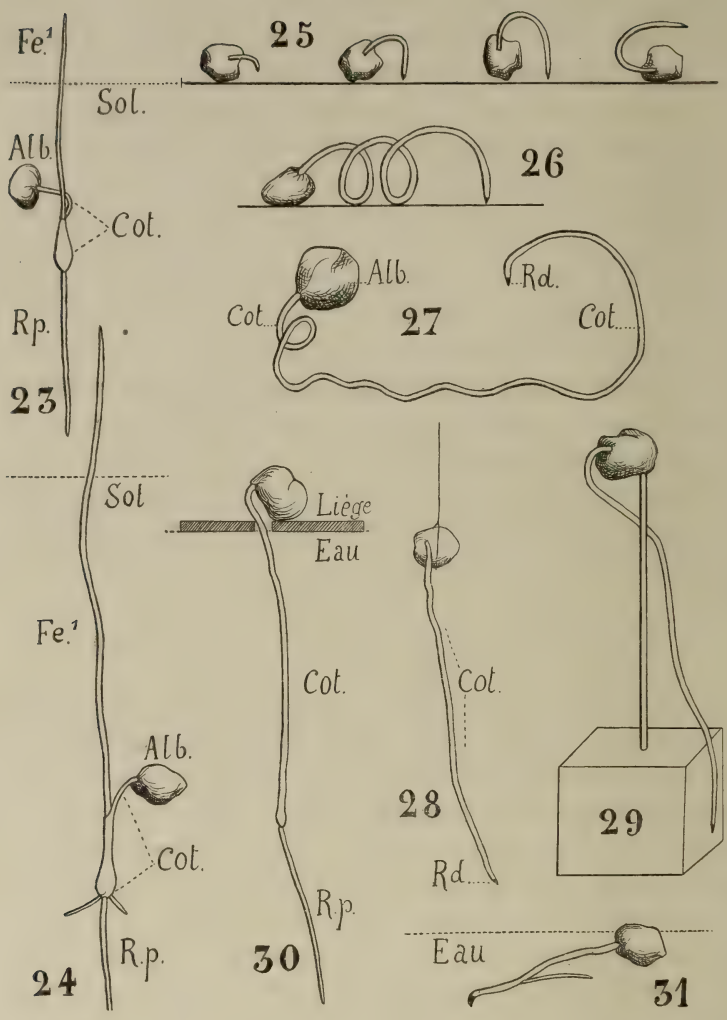
Il est probable que dans son pays d'origine, si pas de nos jours, du moins autrefois, certains insectes intervenaient efficacement dans la pollinisation du *Crinum Capense;* et ainsi s'expliquerait le grand développement, le coloris du périanthe, le parfum et le nectar que sécrètent les glandes septales. Il ne semble pas qu'en Europe cette plante reçoive la visite d'insectes capables de la polliniser.

§ 5. — Observations sur la germination.

La germination des graines du *Crinum Capense* se produit constamment quelques jours après leur dissémination. Ces graines ont un albumen charnu, gorgé d'eau, qui leur permet de germer dans un milieu absolument sec. Grâce à cette particularité, on a pu placer des graines dans des conditions très différentes les unes des autres, conditions qui ont eu un contrecoup marqué sur la manière d'être des plantules. Les expériences ont porté sur un très grand nombre de graines afin d'éliminer les particularités qui pourraient résulter de causes accidentelles. Toutes les descriptions qui vont suivre ont été faites d'après des plantules âgées de quatre à cinq semaines.

A. — Germination en terre.

Lorsqu'une graine est recouverte d'une mince couche de terre (3 centimètres environ), le cotylédon reste assez court; sa gaine se renfle de bonne heure pour former le bulbe; la



Germination $\left(\frac{1}{3}\right)$. — Fig. 23 : Graine placée à une faible profondeur en terre. — Fig. 24 : Graine profondément enterrée. — Fig. 25 et 26 : Graines germant à la surface du sol. — Fig. 27 : Graine germant sur la table du laboratoire. — Fig. 28 : Graine suspendue à un fil. — Fig. 29 : Graine fixée à un support rigide. — Fig. 30 : Graine maintenue par un flotteur à la surface de l'eau. — Fig. 31 : Graine flottant librement à la surface de l'eau.

racine principale et la feuille [1] se développent normalement (fig. 23).

Lorsque la graine est enfouie plus profondément (à 15 centimètres sous la surface du sol), le développement se fait comme dans le cas précédent, sauf que la feuille [1], ayant à traverser une plus grande épaisseur de terre, doit s'allonger considérablement (fig. 24).

B. — Germination a la surface du sol.

Suivons le développement à partir du début de la germination. Après avoir percé l'albumen, le cotylédon s'incurve vers le bas, s'allonge, touche le sol, et par ce fait repousse la graine. Celle-ci, d'abord dérangée de sa position première, finit par culbuter (fig. 25), entraînant avec elle le cotylédon. Mais la région inférieure de ce dernier, qui est douée de géotropisme positif, se dirige de nouveau vers le bas en s'allongeant, et le même phénomène se reproduit. Il peut en résulter une série de culbutes; le cotylédon s'accroissant au point de mesurer 2 décimètres de longueur, s'est enroulé assez régulièrement en hélice (fig. 26). D'autres fois, quand par suite d'une forme moins régulière, la graine est renversée successivement dans différents sens, ou oscille sans se renverser, le cotylédon décrit des sinuosités irrégulières et traîne sur le sol.

Il peut arriver que la grande longueur du cotylédon et les sinuosités qu'il décrit constituent une cause de stabilité suffisante : l'extrémité inférieure du cotylédon pénètre en terre. Alors seulement la racine principale commence à se développer et à s'enfoncer régulièrement dans le sol. Le bulbe ensuite ne tarde pas à se renfler.

Mais très souvent la plantule manquant de stabilité ne parvient pas à pénétrer en terre. En ce cas, la gaine du cotylédon s'épaissit un peu et forme un mince bulbe qui n'a pas de racine, et qui passe immédiatement à l'état de vie latente. Si l'expérience est faite chez nous en plein air, ce petit bulbe est exposé aux intempéries de l'hiver et périt. Si l'expérience est réalisée

à l'abri des gelées, le bulbe peut entrer en végétation au retour de la bonne saison.

En résumé, les graines germant à la surface d'un sol complètement nu manquent de stabilité, et cette circonstance suffit pour modifier considérablement le développement des plantules.

C. — Germination dans l'air sec.

1. *Graines déposées sur la table* (fig. 27). — Les conditions sont fort semblables à celles de l'expérience précédente. Elles en diffèrent pourtant, par l'instabilité encore plus grande de la graine et par l'impossibilité absolue, pour la région inférieure du cotylédon, de s'enfoncer dans le substratum.

Le cotylédon mesure de 20 à 30 centimètres; il est enroulé en hélice ou irrégulièrement sinueux. Il n'y a ni bulbe ni racine.

2. *Graines suspendues à l'extrémité d'un fil* (fig. 28). — Stabilité relative. La graine ne peut plus culbuter, mais elle peut osciller. Le cotylédon s'allonge un peu moins que dans le cas précédent (15 à 20 centimètres). Il est presque rectiligne; un peu incliné du côté opposé à la lumière incidente, sous l'action de l'héliotropisme négatif de sa région inférieure. Ni bulbe ni racine.

3. *Graines fixées à un support rigide* (fig. 29). — Même manière d'être. Action plus marquée de l'héliotropisme négatif.

D. — Germination dans l'eau.

1. *Graines maintenues à la surface de l'eau au moyen d'un flotteur* (fig. 30). — Il est à noter que ces graines sont fixes. Le cotylédon mesure une quinzaine de centimètres, la racine une dizaine de centimètres. Le bulbe ne s'est pas développé [1].

2. *Graines flottant librement à la surface de l'eau* (fig. 31). — En vue de cette expérience, on a choisi des graines moins

---

[1] En prolongeant l'expérience, on a constaté la formation d'un bulbe allongé.

denses que l'eau. Elles ont été jetées dans un aquarium où elles flottaient donc librement, sans aucun point d'appui, pouvant osciller en tous sens avec la plus grande facilité.

Le cotylédon ne mesure que 6 à 8 centimètres; la feuille [1] en mesure 4 à 5 (dans l'expérience précédente, elle n'avait pas encore commencé son développement). La racine n'atteint que quelques millimètres et forme un crochet dirigé vers le bas. L'axe de la plantule est horizontal. Quand les plantules sont âgées de six semaines, leur racine atteint une dizaine de centimètres.

3. *Graines complètement immergées.* — Il s'agit de graines plus denses que l'eau et d'autres moins denses, qui ont été maintenues immergées au moyen d'un poids. Ces graines germent très tardivement et à des intervalles considérables.

E. — Résultats des expériences.

Les plantules obtenues dans les diverses expériences décrites ci-dessus, ont été tenues en observation pendant plusieurs mois. Dans l'énoncé qui va suivre, nous tiendrons compte de la façon dont elles se sont comportées pendant toute la durée de nos observations.

Il est à présumer qu'eu égard à leur grosseur, les graines du *Crinum Capense* ne sont pas enfouies en terre : dans les conditions naturelles, elles restent donc à la surface du sol, exposées à la lumière, souvent privées de l'humidité qui est nécessaire à la germination des graines en général.

Ce qui confirme cette hypothèse, c'est l'étonnante adaptation des graines de *Crinum* à de semblables conditions de germination. Elles possèdent, en effet, une particularité, bien rare, qui leur permet de se passer, lors de la germination, de l'humidité du milieu ambiant. Elles ont, en effet, un albumen volumineux, charnu, gorgé de liquide, protégé contre la dessication par une pellicule de suber très efficace, comme le prouvent les graines qui n'étaient que faiblement ridées après avoir séjourné pendant deux mois sur une table, dans un laboratoire où l'air était très sec.

Mais un autre danger résulte du fait que les graines ne sont pas recouvertes de terre : c'est leur peu de stabilité, qui permet la culbute des plantules. Dans ces conditions, la région inférieure du cotylédon ne peut s'enfoncer directement dans le sol; elle est constamment déplacée de la direction que son géotropisme positif tend à lui faire prendre. La racine en serait donc réduite à se développer dans l'air souvent sec, donc dans un milieu incompatible avec son fonctionnement. Cela n'arrive pas. La racine ne se développe pas dans ce milieu défavorable, mais le cotylédon s'allonge considérablement, au point que sa longueur même peut constituer une cause de stabilité pour la plantule. D'autres fois, une stabilité suffisante provient du fait que la graine est maintenue en place par les aspérités du sol ou les feuilles mortes qui le couvre. C'est seulement lorsque la région inférieure du cotylédon a pu pénétrer dans une terre assez humide que la racine principale peut commencer son développement, bientôt suivi de celui des racines latérales (1).

§ 6. — Développement de la racine principale.

Il est établi, par plusieurs des expériences précédentes, que l'accroissement de la radicule est toujours tardif. D'autres expériences ont été réalisées en vue de déterminer quels sont les facteurs qui provoquent ou retardent cet accroissement. Elles ont été effectuées au moyen de plantules âgées d'une quinzaine de jours et provenant de graines ayant germé sur la table du

---

(1) La pénétration de la racine principale en terre est facilitée par l'intervention d'une couronne de poils fixateurs spéciaux qui, sous l'influence de l'humidité, prennent naissance à la surface de l'*hypocotyle*. Ces poils, qu'il ne faut pas confondre avec les poils radicaux, ont été découverts par M. le Prof. A. Gravis qui fera connaître leurs particularités morphologiques et physiologiques dans un prochain mémoire intitulé : *Recherches anatomiques et éthologiques d'embryologie végétale*. Une analyse de ce mémoire paraîtra dans le volume VI des « Archives de l'Institut botanique ».

(Note ajoutée pendant l'impression.)

laboratoire dans l'air sec. Le cotylédon seul s'était allongé et mesurait une dizaine de centimètres de longueur; la radicule n'était pas plus longue qu'au sortir de la graine, c'est-à-dire qu'elle mesurait moins de 1 millimètre.

1. *Plantules déposées sur du sable sec.* — Bien que l'extrémité inférieure du cotylédon ait été enfouie à 1 centimètre de profondeur dans le sable, afin de lui donner une fixité suffisante, il a été constaté, un mois après, que la racine principale n'avait pas encore commencé son développement.

2. *Plantules déposées sur du sable humide.* — Placées comme les précédentes, ces plantules possédaient, après quinze jours, une racine principale longue de 1 centimètre déjà. L'influence de l'humidité est donc manifeste.

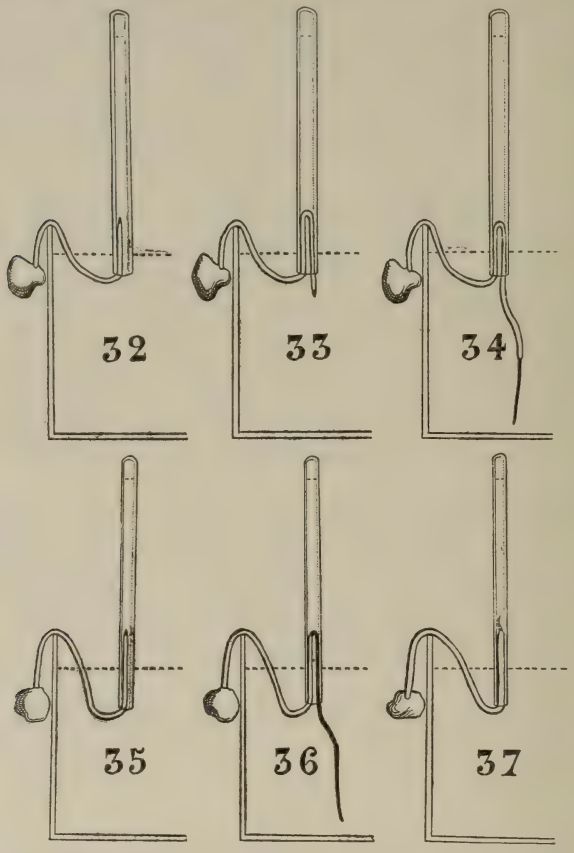
3. *Plantules suspendues dans l'air humide.* — Sous une cloche dont l'atmosphère est saturée d'humidité, la racine principale ne tarde pas à s'allonger et à se couvrir de poils absorbants.

4. *Plantules au contact de l'eau liquide.* — Les graines en germination ont été déposées sur une lame de liège flottant à la surface de l'eau de façon que la région inférieure du cotylédon seule fut immergée. Dans ces conditions, la racine principale prend un rapide développement.

5. *Plantules dont la région inférieure est maintenue verticalement vers le haut.* — Il n'est pas facile de maintenir, pendant quelques jours, la région inférieure du cotylédon dans une position verticale, la radicule étant tournée en haut. Par suite de son géotropisme positif, le cotylédon se courbe et ramène son extrémité inférieure vers le bas avant que la radicule ait manifesté le moindre accroissement, même si on opère dans les conditions les plus propices au développement de la racine, c'est-à-dire en plaçant l'extrémité inférieure du cotylédon dans l'eau. La figure 32 représente le dispositif qui a donné les meilleurs résultats. L'extrémité inférieure de la plantule a été

introduite dans un tube en verre, fermé au bout supérieur et rempli d'eau.

Les résultats ont été quelque peu différents et en corrélation avec le diamètre du tube employé et la grosseur du cotylédon.



Germination $\left(\frac{1}{3}\right)$. — Fig. 32 à 37 : Plantules disposées de façon que l'extrémité inférieure du cotylédon soit verticalement dans l'eau, la radicule tournée vers le haut.

Tube de 5 millimètres de diamètre (fig. 32). — Le cotylédon a continué à s'allonger, mais il s'est recourbé en formant un coude qui lui a permis de s'accroître vers le bas; il

est sorti du tube (fig. 33) et, après quelques jours, la racine a commencé à se développer. La figure 34 représente une plantule, trois semaines après la mise en expérience. Le géotropisme positif du cotylédon est bien évident.

Tube de 3 millimètres de diamètre (fig. 35). — Le diamètre est trop faible pour permettre au cotylédon de se recourber. Dans certains cas, une mince racine a pris naissance, s'est repliée en formant un coude semblable à celui du cotylédon, dans l'expérience précédente; elle s'est frayé un passage entre le cotylédon et la paroi, et finalement s'est développée à l'extérieur (fig. 36).

Dans d'autres cas, la racine n'a pas trouvé l'espace nécessaire pour se recourber. Elle n'a pu s'allonger que de 4 à 5 millimètres en formant un commencement d'hélice (fig. 37).

6. *Plantules suspendues à un fil.* — La région inférieure du cotylédon était seule immergée dans l'eau. L'expérience a été faite à la lumière et à l'obscurité.

Les plantules placées à l'obscurité ont toutes développé leur racine plus rapidement que celles exposées à la lumière.

Résultats des expériences.

Il résulte des expériences qui précèdent qu'au point de vue du développement de la racine principale, l'humidité est un facteur indispensable, l'obscurité, un facteur favorable mais non nécessaire.

La racine principale manifeste aussi un géotropisme positif intense dès le début de sa formation. Elle ne se développe même pas du tout quand elle est dans l'impossibilité de se diriger vers le bas.

Dans le *Crinum Capense,* l'apparition de la racine principale est toujours tardive, même dans les conditions naturelles les plus favorables. Contrairement à ce que l'on voit d'ordinaire chez les autres plantes, c'est le cotylédon qui sort le premier de la graine.

§ 7. — Croissance intercalaire du cotylédon et influence des agents extérieurs sur cette croissance.

A diverses reprises, nous avons pu constater l'énorme allongement du cotylédon et la direction verticale vers le bas qu'il tend toujours à prendre. Il y a lieu de se demander si cet allongement se fait dans toute la longueur du cotylédon, ou bien si une région est plus spécialement le siège de l'accroissement intercalaire.

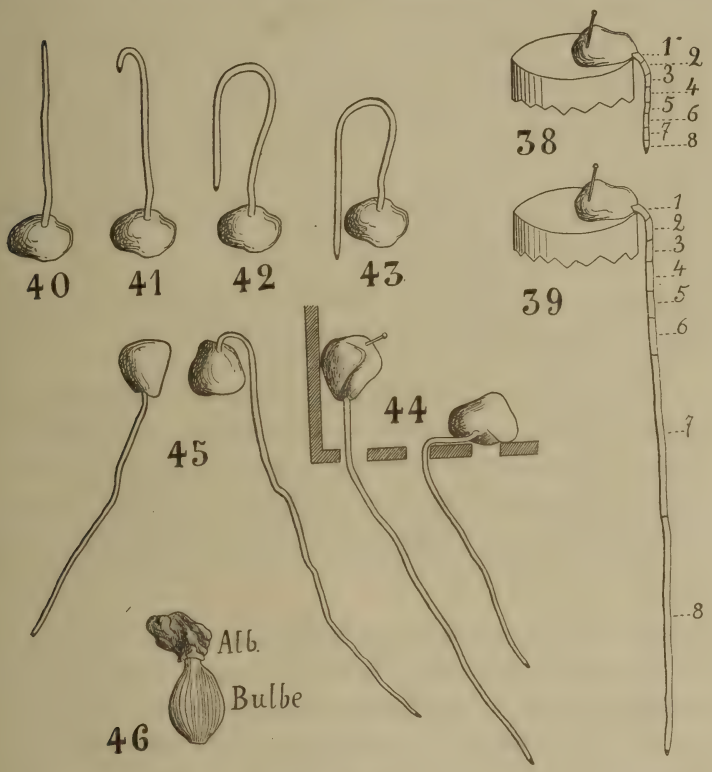
Dans une première catégorie d'expériences, on a enlevé, de la région inférieure du cotylédon, une portion plus ou moins longue, supprimant donc du même coup la radicule. Les graines ont été piquées sur une lame de liège de façon que la surface de section fut dirigée vers le haut.

Lorsque la partie enlevée mesurait seulement 1 millimètre, le cotylédon a continué de s'accroître de 1 centimètre environ, en dirigeant, après courbure, son extrémité libre vers le bas. Quand on a enlevé 5 millimètres du cotylédon, les plantules mutilées ont cessé de s'accroître et n'ont plus manifesté le moindre géotropisme positif.

Il ressort de ces expériences que la croissance du cotylédon et son géotropisme sont localisés dans sa partie inférieure, sur une courte longueur. Cette dernière ne peut être déterminée que très approximativement par des expériences comme celles dont il vient d'être fait mention. Il est évident, en effet, que la blessure doit amoindrir considérablement la vitalité de la région voisine de la surface de section. D'ailleurs, voici, pour ce qui concerne l'allongement du cotylédon, une expérience plus concluante :

Il s'agit de plantules âgées de quelques jours, qui ont germé sur la table, dans le laboratoire ; leur cotylédon mesure de 4 à 6 centimètres de longueur. On y a fait des marques à l'encre de Chine de demi en demi centimètre de distance, puis les graines ont été fixées à un support convenable, de façon que la plantule puisse librement s'accroître vers le bas, dans l'air.

La figure 38 montre une des plantules au moment de la mise en expérience. Son cotylédon mesurait extérieurement 4 centimètres : des traits à l'encre de Chine ont été tracés à distance de 5 millimètres les uns des autres de façon à délimiter huit segments. Le segment le plus proche de la graine porte le n° 1. Des mensurations ont été faites quotidiennement, aussi longtemps que le cotylédon a continué de s'accroître, c'est-



Germination $\left(\frac{1}{3}\right)$. — Fig. 38 et 39 : Expérience sur la croissance intercalaire du cotylédon. — Fig. 40 à 43 : Expérience sur le géotropisme. - Fig. 44 et 45 : Expériences sur le phototropisme (dans l'expérience représentée par la figure 44, la lumière venait obliquement du côté gauche ; dans celle de la figure 45, la lumière venait verticalement d'en bas). — Fig. 46 : *Crinum Mac Owani*, graine enfouie dans du sable sec et retrouvée deux ans et demi après.

à-dire pendant un mois. La figure 39 représente la plantule à la fin de l'expérience : le segment n° 1 ne s'est allongé que de 1 millimètre; les segments n° 2 et n° 3 chacun de 3 millimètres; les segments n° 4 et n° 5 chacun de 6 millimètres; le segment n° 7 s'est accru, pendant les premiers jours, de 5 à 6 millimètres journellement, puis l'allongement a été de plus en plus lent; enfin quand ce segment a atteint 50 millimètres, sa croissance s'est arrêtée. Le segment n° 8 s'est allongé moins rapidement que le précédent au commencement de l'expérience; mais, après quelques jours, l'accroissement s'est accéléré et n'a cessé que lorsque le segment mesurait 95 millimètres.

Ces constatations prouvent donc bien que l'allongement du cotylédon résulte de l'accroissement intercalaire d'une région voisine de sa partie inférieure, et que cette région de maximum d'allongement est de faible étendue.

Abordons maintenant la question de l'influence des agents extérieurs sur la croissance du cotylédon.

1. *Géotropisme.* — Le géotropisme positif du cotylédon est suffisamment établi par plusieurs des expériences relatées précédemment. Quant au siège de ce géotropisme, il se trouve principalement dans la région inférieure du cotylédon, mais la courbure qui s'y manifeste d'abord peut se déplacer ensuite vers la région moyenne, comme le prouve l'expérience suivante :

De grosses graines ont été déposées, dans l'obscurité, à l'orifice de flacons vides, le hile étant tourné vers le bas. Le cotylédon s'est allongé verticalement dans le flacon. Lorsqu'il eut atteint 7 ou 8 centimètres, la plantule a été retournée, fixée au moyen de deux épingles, comme l'indique la figure 40, et maintenue dans l'obscurité. Vingt-quatre heures plus tard, une courbure en demi-cercle s'était produite dans la région voisine de la radicule (fig. 41). Les jours suivants, il y eut non seulement allongement du cotylédon vers le bas, mais encore déplacement de la courbure comme on peut le constater dans les figures 42 et 43.

L'explication de ce phénomène semble résulter des considérations suivantes :

La courbure géotropique se produit d'abord dans la région du maximum de croissance intercalaire, c'est-à-dire dans la région du cotylédon la plus voisine de la radicule. La courbure géotropique se manifeste ensuite et successivement dans les régions dont la croissance est de moins en moins rapide, c'est-à-dire dans les régions de plus en plus éloignées de la radicule. La courbure géotropique, enfin, s'efface dans les régions où elle s'est produite d'abord, parce que ces régions sont graduellement amenées en dehors de la verticale, et alors la gravitation défait ce qu'elle a fait.

Quoi qu'il en soit, on comprend combien ce phénomène est utile à une plantule qui, se développant à la surface du sol, se trouve brusquement retournée par une culbute comme nous l'avons expliqué plus haut (p. 23). Dans cette circonstance, la radicule est ramenée près du sol, non seulement par la croissance de haut en bas du cotylédon, mais encore par le déplacement simultané de la courbure géotropique.

Quelques expériences ont été faites aussi en fixant, dans diverses positions, des graines sur le disque tournant verticalement d'un clinostat. Les cotylédons se sont développés indifféremment dans une direction quelconque sans manifester de courbure.

2. *Phototropisme.* — Lorsqu'une graine est fixée au moyen d'épingles sur la partie verticale d'un châssis de fenêtre à l'intérieur du laboratoire, le cotylédon s'allonge en descendant, mais il s'incline du côté de l'ombre.

On peut disposer l'expérience autrement. Plusieurs graines sont fixées à divers niveaux dans une petite boîte tapissée intérieurement de papier noir ; le fond de cette boîte est percé de trous. La boîte elle-même est suspendue devant une fenêtre, le plus haut possible, de façon à être éclairée obliquement par en dessous. Lorsque les graines germent, leurs cotylédons sortent par les trous du fond et descendent obliquement dans

l'air en se dirigeant vers l'intérieur de l'appartement (fig. 44). La déviation est variable selon l'intensité de la lumière.

D'autres graines encore ont été fixées dans une sorte de petite armoire placée sur la tablette d'une fenêtre et éclairée au moyen d'un miroir incliné de façon à y faire pénétrer la lumière verticalement de bas en haut (1). Malgré cet éclairage tout à fait anormal, les cotylédons se sont allongés vers le bas, mais en se dirigeant obliquement vers les parties les plus sombres de la petite armoire (fig. 45).

Le phototropisme négatif du cotylédon du *Crinum Capense* est donc toujours moins intense que son géotropisme positif. Dans les conditions naturelles, l'influence de la lumière et celle de la gravitation agissent d'ailleurs à peu près dans le même sens et s'ajoutent l'une à l'autre pour amener la radicule au contact du sol.

3. *Influence de la chaleur et de la lumière.* — Comme on devait s'y attendre, la température de notre pays en août et en septembre n'est pas celle qui convient le mieux au développement du *Crinum Capense*. Une chaleur plus élevée hâte la germination et active l'accroissement de la plantule. Le cotylédon s'allonge plus vite et atteint une longueur de 30 centimètres lorsque la température est portée à 25° pendant quelques heures chaque jour. Lorsque la température ne dépasse jamais 20°, le cotylédon mesure seulement une dizaine de centimètres. Dans les deux cas auxquels il est ici fait allusion, la germination s'était produite à l'air dans l'obscurité. Au-dessous de 18°, l'accroissement du cotylédon cesse à peu près complètement.

Lorsque le cotylédon est normalement exposé à la lumière du jour, il verdit et par suite la fonction d'élaboration s'établit dans toute la partie aérienne. Cette fonction concourt à pro-

---

(1) Voir A. Gravis, *Exercices et Traité de botanique.* Gand, J. Vanderpoorten, 1912, p. 471.

voquer l'allongement si utile du cotylédon lorsque l'enracinement s'effectue difficilement.

4. *Effet des conditions défavorables à la végétation.* — Lorsque la plantule rencontre des circonstances très défavorables à sa végétation (froid, obscurité, sécheresse), le cotylédon s'allonge peu, la racine principale ne se forme pas, l'albumen diminue de volume en se ridant fortement : l'eau et les réserves alimentaires qu'il contenait vont s'accumuler dans la gaine du cotylédon qui se renfle très lentement en formant un bulbe mince, de forme allongée. Après quoi, la plantule passe à l'état de vie latente, attendant des conditions meilleures.

C'est ce que l'on voit ordinairement après une couple de mois lorsque des graines ont germé sur la table du laboratoire ou sur la terre au jardin.

Une expérience bien curieuse a été réalisée accidentellement au moyen d'une très grosse graine de *Crinum Mac Owani*. Sitôt après sa maturité, à la fin d'octobre, cette graine avait été déposée dans du sable sec, conservée dans une chambre noire non chauffée et oubliée... Lorsqu'elle fut retrouvée deux ans et demi après, elle était dans l'état que voici : contre la graine complètement ridée et desséchée, s'était formé un bulbe long de 30 millimètres, épais de 25 millimètres. Le cotylédon ne s'était allongé que de la quantité strictement nécessaire à la formation du bulbe; la racine principale, les racines latérales et les premières feuilles ne s'étaient pas développées (fig. 46). Le bulbe paraissant encore vivant a été placé dans du *Sphagnum* humide dans une serre modérément chauffée. Il n'a pas tardé à entrer en végétation après avoir attendu pendant plus de deux ans à l'état de repos complet!

§ 8. — Rôle des stomates situés sur le suçoir.

Nous avons déjà parlé précédemment de l'existence de stomates sur le suçoir cotylédonaire, c'est-à-dire sur la partie du cotylédon renfermée dans l'albumen. Ils sont très nombreux

(dix par millimètre carré), avons-nous dit, sur la calotte hémisphérique du sommet; plus bas leur nombre diminue considérablement.

La présence de stomates sur un organe qui est destiné à rester inclus dans l'albumen, à ne jamais venir en contact direct avec l'atmosphère, est tout à fait exceptionnelle. Il semble qu'une fonction nouvelle est dévolue à ces stomates.

Leur situation, en effet, écarte, de prime abord, l'idée d'échanges gazeux entre le suçoir et l'albumen dans lequel il est emprisonné. D'ailleurs, on peut constater que les stomates dont il s'agit, ne fonctionnent pas comme des stomates aérifères : ils ne peuvent s'ouvrir ni se fermer suivant le degré de turgescence des cellules stomatiques. Des lambeaux d'épiderme vivant ont été traités par des solutions titrées de nitrate de potasse dont la concentration a varié de 0,5 à 25 %; en aucun cas la fente stomatique n'a changé de diamètre, alors même que la plasmolyse des cellules stomatiques s'est produite. D'autre part, on ne peut admettre qu'il s'agisse ici de stomates aquifères permettant à l'eau en excès dans l'embryon de sortir sous forme de gouttelettes liquides. Loin de contenir trop d'eau, l'embryon doit en absorber beaucoup, comme le prouve la germination des graines placées sur une table, dans un laboratoire où l'air est sec. Nous avons vu que c'est dans ces conditions surtout que le cotylédon s'allonge démesurément, et c'est uniquement dans l'albumen que l'embryon peut puiser l'eau nécessaire à cet énorme accroissement. Comment le fait-il ? Précisément par l'intermédiaire du suçoir sur lequel se trouvent les stomates. Et dès lors, ces derniers ne serviraient-ils pas plutôt à absorber l'eau et les matières dissoutes contenues dans l'albumen? De multiples expériences ont été faites dans le but de répondre à cette question. Sans entrer dans les détails, voici les procédés mis en œuvre et les résultats d'ensemble :

On a expérimenté sur des plantules qui avaient germé sur une table; elles étaient âgées de cinq à trente jours et leur cotylédon mesurait de 3 à 20 centimètres de longueur. Quel-

ques-unes d'entre elles ont servi à l'expérience suivante : l'albumen a été enlevé par petits morceaux de façon à mettre à nu toute la surface du suçoir ; celui-ci a été plongé pendant un temps plus ou moins long dans un bain colorant (violet de Russie, éosine, action successive du tanin et du chlorure ferrique). Chez d'autres, le suçoir n'a pas été extrait de l'albumen, mais des piqûres de matières colorantes ont été faites dans l'albumen dans le but de permettre à la couleur de diffuser et d'arriver jusqu'au suçoir.

Voici maintenant les résultats les plus probants, reposant sur un grand nombre de constatations : vu extérieurement, le sommet du suçoir apparaît toujours plus coloré que le reste. Des lambeaux d'épiderme arrachés de ce sommet et examinés de face, au microscope, montrent les cellules épidermiques ordinaires faiblement colorées; les cellules stomatiques, au contraire, sont toujours très foncées et leur coloration est la plus intense sur les parois bordant la fente des stomates. Si l'on examine des portions d'épiderme arrachées plus bas sur le suçoir, le degré de coloration des cellules stomatiques est le même, mais comme ces dernières sont beaucoup moins nombreuses que sur le sommet, il est compréhensible que l'épiderme paraisse moins coloré.

Des coupes transversales ont été pratiquées à différents niveaux dans le suçoir, et leur observation confirme ce qu'on pouvait déjà augurer par le simple examen de l'épiderme vu de face. Les coupes faites dans le sommet paraissent entièrement colorées, la coloration diminuant d'intensité de la périphérie vers le centre. La matière colorante est surtout localisée dans les parois des cellules; leur contenu est à peu près incolore. Certaines coupes ont été faites juste au niveau de grands méats et elles nous permettent de constater un fait qui, tout en confirmant le rôle nouveau que semblent remplir les stomates, aurait comme corollaire une fonction nouvelle des méats. Certains de ces derniers sont, en effet, remplis de matière colorante et les parois qui les bordent sont particulièrement colorées. Ce même fait a d'ailleurs été observé dans des coupes pratiquées

plus bas dans le suçoir. Dans ces dernières, l'épiderme et seulement une ou deux assises de cellules périphériques du parenchyme étaient colorées; tout le reste était incolore, sauf les trachées qui, parfois, étaient rattachées à la zone colorée externe par une traînée de matière colorante, localisée dans un méat.

Avant de tirer les conclusions des faits observés, remarquons qu'il n'y a aucune raison de supposer que le suc cellulaire de l'albumen, tenant en solution les matières de réserve, soit absorbé d'une autre façon que les matières colorantes dont nous nous sommes servi : nous supposons donc que l'absorption se fait de la même manière dans les deux cas.

Cela étant, il semble qu'il faille considérer comme suçoir toute la partie du cotylédon qui reste enfermée dans l'albumen. Mais l'absorption n'est pas également active partout. Elle se fait lentement, par osmose à travers les membranes des cellules épidermiques; elle se fait bien plus rapidement, par diffusion, aux endroits correspondants aux stomates. Cela ressort clairement de la coloration intense que prend le suçoir dans la région où les stomates sont les plus nombreux, c'est-à-dire à son sommet. Cela ressort surtout de la coloration très foncée qui se manifeste dans le voisinage des stomates. L'absorption est encore activée par la circulation qui se fait dans certains méats. Nous comprenons d'ailleurs aisément la présence de matière colorante dans ces derniers, vu qu'ils communiquent par l'intermédiaire des stomates avec le milieu dans lequel se trouve le suçoir.

Chez toutes les plantes, les méats intercellulaires sont normalement remplis d'air. Malgré leur faible diamètre, l'eau n'y pénètre jamais par capillarité, même lorsqu'on plonge dans l'eau une coupe très mince faite dans un tissu vivant. Il semble donc que les parois des méats ont la propriété d'extraire les gaz dissous dans un liquide (suc cellulaire) et de les faire passer à l'état gazeux. Or dans le suçoir du *Crinum Capense*, nous trouvons une exception, bien rare semble-t-il, qui consiste dans la présence de liquide dans certains méats. D'autres méats voisins sont encore remplis d'air. Il y a donc dans ce cas une modifi-

cation, véritable adaptation, de certains méats à une fonction nouvelle qui est la circulation du liquide absorbé au dehors. Cette adaptation est d'ailleurs corrélative à celle des stomates du suçoir qui, comme il semble établi par les constatations précédentes, sont devenus des organes absorbants.

CONCLUSIONS

Les organes floraux du *Crinum Capense* sont disposés de façon à permettre la pollinisation directe à la suite de chocs imprimés à la tige florifère par le vent. L'efficacité de cette disposition semble assez variable et cela nous amène à penser que le nombre souvent très restreint des graines, leur grosseur et leur mode de germination si exceptionnel ne sont peut-être que des conséquences lointaines d'une pollinisation incomplète, en ce sens qu'un petit nombre de grains de pollen parviennent aux stigmates. Lorsqu'un ou deux ovules seulement sont fécondés, ils prennent un développement considérable : l'embryon est volumineux et l'albumen est le siège d'une énorme prolifération de cellules. Celles-ci restent gorgées de liquide et permettent une germination immédiate de l'embryon qui est lui-même déjà notablement différencié au moment de la maturité du fruit. D'autre part, le volume considérable de la graine, mettant obstacle à son introduction dans le sol, nécessite un accroissement considérable du cotylédon, la racine ne se développant que tardivement, lorsque l'extrémité inférieure de la plantule a été introduite en terre.

Remarquons que chez la plupart des autres plantes, l'embryon et l'albumen, étant presque complètement desséchés, passent par un état de vie latente. A l'époque de la germination, c'est tout d'abord la racine principale qui s'allonge et s'enfonce en terre. Elle y absorbe de l'eau, qui permet le développement de l'hypocotyle, l'épanouissement des cotylé-

dons et l'allongement de la tige. Dans le *Crinum Capense* au contraire, l'embryon et l'albumen étant gorgés d'eau ne passent pas par une période de vie latente. La germination se faisant à l'air (à la surface du sol ou au milieu de débris de feuilles mortes), la racine ne peut se développer immédiatement sans courir le risque de périr ou tout au moins de ne pouvoir fonctionner pendant un certain temps. Aussi c'est le cotylédon qui s'allonge et fait les efforts nécessaires pour placer la partie essentielle de l'embryon (la gemmule et la radicule) dans les conditions indispensables à leur végétation.

Ces considérations nous montrent le lien qui semble exister entre la pollinisation, la grosseur des graines et les particularités de leur mode de germination.

Rappelons encore le rôle nouveau dévolu aux stomates situés sur le suçoir et aux méats qui leur font suite : l'absorption de l'eau et des matières dissoutes de l'albumen. Notons enfin que l'allongement du cotylédon, si considérable dans certaines circonstances, se fait par accroissement intercalaire de sa région inférieure, voisine de son insertion sur l'hypocotyle; c'est d'ailleurs dans cette région aussi que se trouve localisé le géotropisme positif du cotylédon.

La structure de l'ovaire et du fruit, celle de l'embryon dans la graine mûre et des plantules en germination ont été décrites dans la première partie de ce travail. Les conditions naturelles qui président à la germination, l'influence des agents extérieurs sur le développement de la racine principale et sur l'accroissement intercalaire du cotylédon ont été envisagées dans la seconde partie.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION 3

CHAPITRE PREMIER. — **ANATOMIE.**

§ 1. L'ovaire et le fruit. 7

§ 2. L'embryon dans la graine mûre. 9

§ 3. Structure des plantules 13

CHAPITRE II. — **PHYSIOLOGIE.**

§ 4. Observations sur la pollinisation 19

§ 5. Observations sur la germination 21

§ 6. Développement de la racine principale. 26

§ 7. Croissance intercalaire du cotylédon et influence des agents extérieurs sur cette croissance 30

§ 8. Rôle des stomates situés sur le suçoir. 35

CONCLUSIONS 39

NOV 7 1922

167

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE

Nec temere, nec timide.

TROISIÈME SÉRIE

TOME XI — DEUXIÈME PARTIE

DÉPOTS :

LONDRES,
chez WILLIAMS et NORGATE,
Henrietta Str., 14.

PARIS,
chez HERMANN, libraire,
rue de la Sorbonne, 6.

BRUXELLES
M. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
Rue de Louvain, 112

1922

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE

NOV 7 1922

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE

Nec temere, nec timide.

TROISIÈME SÉRIE

TOME XI — DEUXIÈME PARTIE

DÉPOTS :

LONDRES,
chez WILLIAMS et NORGATE,
Henrietta Str., 14.

PARIS,
chez HERMANN, libraire,
rue de la Sorbonne, 6.

BRUXELLES

M. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

Rue de Louvain, 112

1922

TABLE DES MATIÈRES DU VOLUME XI.

DEUXIÈME PARTIE.

1. — Sur les courbes du quatrième ordre et de la troisième classe, par Cl. Servais.

2. — Note sur les courbes trochoïdales, par C. De Jans.

3. — Notes de géométrie et de trigonométrie sphériques, par A. Gob.

4. — Sur une classe de déterminants, par L. Fouarge.

5. — Sur les fonctions implicites, par V. Leclercq.

6. — Genèse et anatomie des péricarpes et des spermodermes chez les polygonacées (*Poligonum aviculare* L), par L. Lonay.

SUR

LES COURBES

DU

QUATRIÈME ORDRE

ET DE LA

TROISIÈME CLASSE

PAR

Cl. SERVAIS

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE GAND

SUR

LES COURBES

DU

QUATRIÈME ORDRE

ET DE LA

TROISIÈME CLASSE

---

1. *Notations.* — Soient XYZ un triangle réel inscrit dans une conique Σ; E, F deux points réels ou imaginaires conjugués de cette courbe; A, B, C les points d'intersection de EF avec les côtés YZ, ZX, XY du triangle; (ABC.....) et (A'B'C'.....) deux ponctuelles projectives ayant pour éléments doubles les points E, F; P un point réel ou imaginaire de Σ; P_1, P_2, P_3 les points (PA', YZ), (PB', ZX), (PC', XY); π_1, π_2, π_3 les points (XP, EF), (YP, EF), (ZP, EF); P_{11}, P_{22}, P_{33} les seconds points d'intersection des droites PA', PB', PC' avec la courbe Σ.

2. Les deux triangles XYZ, PEF inscrits dans la conique Σ sont circonscrits à une conique Σ'. De la projectivité

$$(ABC\ldots) \overline{\wedge} (A'B'C'\ldots)$$

on déduit l'involution

$$P(EF,\quad BC',\quad B'C) \text{ ou } P(EF,\quad BP_3,\quad CP_2),$$

qui montre que les droites PE, PF sont tangentes à une conique inscrite dans le quadrilatère BCP_3P_2. Cette conique

est Σ' ; par suite les trois points P_1, P_2, P_3 sont sur une tangente à cette conique. Donc

Si P *est un point réel ou imaginaire de la conique* Σ, *les droites* PA′, PB′, PC′ *rencontrent les côtés* YZ, ZX, XY *du triangle* XYZ *en trois points* P_1, P_2, P_3 *situés en ligne droite.*

Si les points E, F sont les points cycliques, la droite *p* est une pédale oblique du triangle XYZ ; son enveloppe est l'*hypocycloïde de Steiner* (*).

Les propriétés de la courbe de Steiner s'étendent par projection aux courbes du quatrième ordre et de la troisième classe, mais en recourant au principe de continuité si les points E, F sont réels. Les démonstrations du présent travail sont indépendantes de la réalité ou de la non réalité de ces points.

3. De l'ensemble des points P de Σ, on déduira un ensemble de droites *p* correspondantes. Un point réel S est le centre de perspectivité de deux ponctuelles situées sur XY, XZ et projetées respectivement des points C′ et B′ suivant deux faisceaux projectifs qui engendrent une conique σ. Cette courbe ayant un point réel X commun avec la conique Σ coupe cette dernière en trois points P, M, N, en général distincts de X ; l'un est réel, les deux autres sont réels ou imaginaires conjugués. Les droites *p*, *m*, *n* relatives aux points P, M, N de la conique Σ passent par le point considéré S et jouissent seules de cette propriété. Donc

L'enveloppe des droites p *est une courbe de la troisième classe* C_3.

Le mode de génération, corrélatif de celui de Grassmann pour les cubiques planes, établit aussi ce résultat.

4. Si le point S est situé sur la droite $EF \equiv B'C'$ les faisceaux (B′) et (C′) (3) sont perspectifs. La conique σ dégénère en deux droites, l'une EF, l'autre passant par le point X et rencontrant la conique Σ en un point P. Pour cette position

---

(*) Steiner, *Journal de Crelle*, t. 53, pp. 231-237 ; *OEuvres complètes*, t. II, pp. 641-647 ; Cremona, *Idem*, t. 64, pp. 101-123.

spéciale du point S, les droites m, n coïncident avec EF; par suite,

La droite EF *est une tangente double de la courbe* C_3.

5. La droite $p \equiv P_1 P_2 P_3$ (2) rencontre EF en un point π; les couples de côtés opposés du quadrangle XPP_2P_3 déterminent sur la tangente double EF l'involution

$$(\pi\pi_1, \quad BC', \quad B'C).$$

Donc

La tangente réelle ou imaginaire p *de la courbe déduite du point* P *de la conique* Σ *rencontre la tangente double* EF *en un point* π *dont les conjugués* π_1, π_2, π_3 *dans les involutions*

$$(BC', B'C, EF), \qquad (CA', C'A, EF), \qquad (AB', A'B, EF)$$

sont respectivement sur les droites XP, YP, ZP.

6. Les ponctuelles décrites par les points P et π_1, respectivement sur la conique Σ et sur la tangente double EF, sont les sections d'un faisceau de rayons de centre X et sont projectives. Les points π et π_1 conjugués dans l'involution (BC', B'C, EF) (5) décrivent deux ponctuelles involutives; par suite, les ponctuelles (P) et (π) sont projectives. Ainsi

Les tangentes p *de la courbe* C_3 *déterminent sur la tangente double* EF *une ponctuelle* (π) *projective à la ponctuelle du second ordre* (P) *formée par les points* P *de la conique* (Σ), *desquels elles sont déduites. Les points* E *et* F *de la ponctuelle* (π) *correspondent respectivement aux points* F *et* E *de la ponctuelle* (P).

7. L'involution déterminée sur EF par le quadrangle $XPZP_{33}$ inscrit dans la conique Σ est identique à l'involution (EF, BC', π π_1) (5); par suite, la droite ZP_{33} passe par π. Donc

Les droites XP_{11}, YP_{22}, ZP_{33} *concourent au point d'intersection* π *des tangentes* p *et* EF.

Remarque. — Cette propriété donne la construction connue de la tangente p issue d'un point π de la tangente double EF et celle du point P de Σ relatif à cette tangente.

Cette construction montre que *les droites* XA′, YB′, ZC′ *sont tangentes à la courbe* C_5. *Le triangle* XYZ *est circonscrit à la même courbe. Les tangentes issues des points* E *et* F *se confondent avec la tangente double* EF.

Ces points E, F sont *les points de contact* de cette tangente EF.

8. Les droites AP_{11}, BP_{22} se coupent en un point S; le quadrangle $P_{11}P_{22}PS$ donne l'involution (AB′, A′B) dont fait partie le couple EF (5); les points E et F sont donc sur une conique circonscrite au quadrangle. Cette conique n'est autre que Σ; par suite,

Les droites AP_{11}, BP_{22}, CP_{33} *concourent en un point* S *de la conique* Σ.

9. Si l'on désigne par $\mathfrak{T}$ le point (PS, EF); par t la tangente à la courbe C_5 issue de $\mathfrak{T}$; par T le point de Σ relatif à cette tangente; par $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$ les traces de XT, YT, ZT sur la tangente double EF, on a l'involution (5)

$$(AB', \quad A'B, \quad EF, \quad \mathfrak{T}\mathfrak{T}_3).$$

Cette involution est identique à celle déterminée par le quadrangle $P_{11}P_{22}PS$ inscrit dans Σ, sur la droite EF; par suite, la droite $P_{11}P_{22}$ passe par le point $\mathfrak{T}_3$ et par analogie les droites $P_{22}P_{33}$, $P_{11}P_{33}$ passent par les points $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$. Donc

Les côtés du triangle P_{11} P_{22} P_{33} *déterminent sur la tangente double* EF *trois points* $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$ *tels que les droites* $X\mathfrak{T}_1$, $Y\mathfrak{T}_2$, $Z\mathfrak{T}_3$ *concourent en un point* T *de la conique* Σ. *La tangente* t *à la courbe* C_5 *déduite du point* T *passe par le point d'intersection de la tangente double* EF *avec la droite* PS (8).

10. Les droites XS, YS, ZS rencontrent la tangente double EF aux points σ_1, σ_2, σ_3. Le quadrangle $XYSP_{22}$ inscrit dans Σ et coupé par la droite EF donne l'involution (EF, BC, $\pi\sigma$). Donc

Les conjugués σ_1, σ_2, σ_3 *du point* π *respectivement dans les involutions*

(EF, BC), (EF, CA), (EF, AB)

sont situés respectivement sur les droites XS, YS, ZS.

On conclut de ce théorème : *Le point* π *et le point* S *se correspondent dans une inversion trilinéaire définie par le triangle* XYZ *et les involutions de rayons*

X(EF, BC) Y(EF, CA) Z(EF, AB).

Dans cette inversion la tangente double EF *correspond à la conique* Σ.

11. Du point S de Σ on déduit la tangente *s* à la courbe C_3; cette tangente rencontre EF au point σ. On a l'involution (5) (EF, $\pi\pi_1$, $\sigma\sigma_1$, $\mathcal{C}\mathcal{C}_1$) identique à celle déterminée sur EF par le quadrangle PSTX inscrit dans la conique Σ. Car XT passe par $\mathcal{C}_1$ et PS passe par $\mathcal{C}$ (9). Il en résulte que les points π et σ sont respectivement sur ST et PT. Par suite,

Les tangentes p, s, t *de la courbe* C_3 *déduites des sommets* P, S, T *du triangle* PST *rencontrent les côtés* ST, TP, PS *sur la tangente double* EF.

12. La tangente au point P à la conique Σ rencontre EF au point P_p. Le théorème de Desargues appliqué aux quadrangles $PPP_{22}P_{23}$, PPXT inscrits dans la conique Σ conduit aux involutions identiques

(EF, B'C', $P_p\mathcal{C}_1$), (EF, $P_p\mathcal{C}_1$, $\sigma\pi_1$).

On a donc les involutions

$$\begin{array}{llll} (EF, & B'C', & \sigma\pi_1, & P_p\mathcal{C}_1) \\ (EF, & C'A', & \sigma\pi_2, & P_p\mathcal{C}_2) \\ (EF, & A'B', & \sigma\pi_3, & P_p\mathcal{C}_3). \end{array}$$

Ces involutions montrent que le point de la conique Σ relatif à la tangente à la courbe C_3 issue de P_p joue par rapport au point T le même rôle que S par rapport à P.

13. Toute droite issue du point σ (11) rencontre la conique Σ en deux points M, N. Le quadrangle XPMN coupé par la transversale EF donne l'involution (EF, $\sigma\pi_1$) dont fait partie le couple B'C' (12) ; par suite, les six points M, N, X, P, B', C' sont sur une conique Σ'. Si des points B', C' on projette les points de Σ respectivement sur XZ et XY, on obtient les ponctuelles perspectives

$$(P_2M_2N_2\ldots X) \overline{\wedge} (P_3M_3N_3\ldots X)$$

et les droites $p \equiv P_2P_3$, $m \equiv M_2M_3$, $n \equiv N_2N_3$ tangentes à la courbe C_3 concourent au centre de perspectivité Q des deux ponctuelles. La droite QC' coupe XZ en un point U de Σ'. Les coniques Σ et Σ' ont pour cordes communes XP, MN ; donc si par les points X, P on mène les droites XZ, PC' coupant Σ en Z et P_{33}, Σ' en U et C', les droites $C'U \equiv C'Q$ et ZP_{33} se coupent sur MN. On en conclut :

Les droites XP_{11}, YP_{22}, ZP_{33} *déterminent sur une corde quelconque* MN *de la conique* Σ, *issue du point* σ (11), *trois points en situation perspective avec* A', B', C'. *Le centre de perspectivité* Q *est à l'intersection des tangentes* p, m, n *de la courbe* C_3 *déduites des points* P, M, N *de la conique* Σ.

Remarque. — La condition nécessaire et suffisante pour que trois tangentes p, m, n soient concourantes est que les trois points P, M, N soient situés sur une conique passant par les

points X, B′, C′. Ces derniers points peuvent être remplacés par Y, C′, A′ ou par Z, A′, B′.

14. Les droites XP_{11}, YP_{22}, ZP_{33} étant respectivement identiques à πX, πY, πZ, la propriété (13) montre que les faisceaux Q (A′B′C′π), π (XYZQ) sont perspectifs. On en conclut le mode de génération suivant de la courbe C_3 : *Étant donnés un triangle* XYZ *et trois points collinéaires* A′, B′, C′, *la droite* p *issue d'un point* π *arbitrairement choisi sur la droite* A′B′C′ *et telle que les rapports anharmoniques* (πX, πY, πZ, *p*) et (A′B′C′π) *soient égaux, enveloppe une courbe* C_3.

Remarques. — I. La droite Xπ et la tangente *p* issue de π rencontrent le côté YZ en deux points X′ et π′; on a

$$(X'YZ\pi') \overline{\wedge} (A'B'C'\pi)$$

et les droites *p*, A′X′ sont tangentes à une conique inscrite dans le quadrilatère ayant pour côtés EF, YZ, YB′, ZC′. Du théorème de Desargues on conclut :

Soient p *la tangente à la courbe* C_3 *issue du point* π *de la tangente double* EF; X′ *le point* (YZ, Xπ), *la tangente* p *et la droite* A′X′ *sont conjuguées dans l'involution définie par les couples de droites projetant du point* (p, A′X′) *les points* Z *et* B′, Y *et* C′.

II. De l'hexagone de Brianchon ayant pour sommets successifs B′, π, (*p*, C′Z), (A′X′, C′Z), X′, Y on déduit la construction suivante de la tangente *p* issue d'un point donné π de EF :

La droite Xπ *coupe* YZ *en* X′; *soient* X″ ≡ (A′X′, C′Z), X‴ ≡ (Xπ, B′ X″), *la tangente* p *passe par le point* (YX‴, C′Z).

III. La tangente *p* détermine une conique (π) du faisceau de coniques inscrites dans le quadrilatère (EF, YZ YB′, ZC′) ; la droite A′X′ est tangente à la conique (π) et décrit autour du point A′ un faisceau projectif au faisceau des coniques (π). Mais

le faisceau (A′ X′) est perspectif au faisceau (Xπ); par suite, la ponctuelle (π) est projective au faisceau de coniques. Ainsi

Si une ponctuelle (π) *est rapportée projectivement à un faisceau tangentiel de coniques et si son support est une tangente commune, la seconde tangente menée d'un point* π *de la ponctuelle à la conique correspondante enveloppe une courbe* C_3.

Ce mode de génération est bien connu.

15. — Les droites *p*, *m*, *n* sont les seules tangentes à la courbe C_3 passant par le point Q (13), car X, P, M, N sont les seuls points communs à Σ et Σ′. En général, les droites *m*, *n* sont distinctes de *p*; cependant si M ≡ P, ce qui correspond à la position particulière TP pour la corde MN (11), les droites *m* et *p* coïncident. Donc

La tangente t *déduite du point* T (9) *passe par le point de contact* C_p *de la tangente* p.

La construction du point de contact C_p de la tangente *p* est ainsi ramenée à celle du point T. La droite AP_{11} coupe la conique Σ en S (8); la droite S π passe par le point T (11).

Les tangentes *m*, *n* à la courbe C_3 coïncident si la droite MN est tangente à la conique Σ. On en déduit :

La polaire du point σ (11) *relativement à la conique* Σ *rencontre cette courbe en deux points* V *et* V′. *Les tangentes à la courbe* C_3 *déduites de ces points ont leurs points de contact sur la tangente* p.

Ce sont les seuls points de C_3 situés sur la tangente *p* et distincts du point de contact C_p. *La courbe* C_3 *est du quatrième ordre.* On la désignera par la notation C_3^4.

La propriété (13) appliquée à la position particulière PT de la sécante MN montre que

Les droites XP_{11} *et* PT *se coupent sur la droite joignant le point* A′ *au point de contact* C_p *de la tangente* p.

Dans le cas où MN est tangente à la conique Σ on a : *Les tangentes menées du point* σ *à la conique* Σ *rencontrent la droite* XP_{11} *en deux points situés sur les droites joignant le point* A′ *aux points d'intersection de la tangente* p *avec la courbe* C_3^4.

16. — Le théorème de Desargues appliqué au quadrangle $PSTP_{11}$ inscrit dans la conique Σ conduit à l'involution

$$(EF,\ A\sigma,\ A'\pi)$$

et le conjugué du point τ dans cette involution est situé sur TP_{11}. Ainsi

On a les involutions

$$(EF, A\sigma, A'\pi), \qquad (EF, B\sigma, B'\pi), \qquad (EF, C\sigma, C'\pi),$$

et les conjugués du point τ dans ces involutions sont situés respectivement sur les droites TP_{11}, TP_{22}, TP_{33}.

Corollaire. — Les points π et σ sont correspondants dans la projectivité

$$(ABC \ldots EF) \overline{\wedge} (A'B'C' \ldots EF),$$

et, par suite,

$$(EF\pi\sigma) = (EFAA').$$

17. — De l'involution (BC′, B′C, EF) (5) on déduit

$$Y(CC'EF) \overline{\wedge} Z(BB'EF).$$

Ces faisceaux engendrent la conique Σ. Par suite,

Les droites YC′ *et* ZB′, ZA′ *et* XC′, XB′ *et* YA′ *se coupent en des points* X_1, Y_1, Z_1 *situés sur la conique* Σ.

Les points X_1, Y_1, Z_1, sont les points de la conique Σ desquels on déduit les tangentes YZ, ZX, XY de la courbe C_3^4.

Les tangentes XA′, YB′, ZC′ sont déduites des points X, Y, Z.

L'égalité $(EF\pi\sigma) = (EFAA')$ montre que le point X joue par rapport à X_1 le même rôle que le point S par rapport au point P. Par suite (8),

Les couples de droites X_1A' *et* XA, Y_1B' *et* YB, Z_1C' *et* ZC *se coupent sur la conique* Σ.

De la projectivité (6) $(P)\overline{\wedge}(\pi)$ et du corollaire (16) on déduit

$$(EFPS) = (EFX_1X) = (EFY_1Y) = (EFZ_1Z).$$

Par suite, *La droite* PS *enveloppe une conique bitangente à la conique* Σ *aux points* E, F *et tangente à chacune des droites* XX_1, YY_1, ZZ_1.

18. Une droite MN passant par le point σ (15) rencontre XP_{11} en un point G de la droite A'Q, Q étant le point de concours des tangentes p, m, n. Si la droite MN tourne autour du point σ, l'involution (MN) décrite sur la conique Σ est projective à la ponctuelle (Q) sur la tangente p. Dans la projectivité (6)

$$(P)\overline{\wedge}(\pi),$$

l'involution (MN) correspond à l'involution $(\mu\nu)$ sur la tangente double EF. Par suite l'involution $(\mu\nu)$ et la ponctuelle (Q) sont projectives. Ainsi

Les couples de tangentes issues des points Q *d'une tangente fixe* p *déterminent sur la tangente double* EF *des couples de points conjugués dans une involution* $(\mu\nu)$ *projective à la ponctuelle* (Q) (*).

Dans cette projectivité au couple EF de l'involution $(\mu\nu)$ correspond le point $\pi \equiv (p, EF)$ de la ponctuelle (Q).

19. Les tangentes à la courbe C_3^4 déduites des points P_{11}, P_{22}, P_{33} sont respectivement $P_1\pi_1$, $P_2\pi_2$, $P_3\pi_3$ (Rem. 7). De même si S_1, S_2, S_3 sont les traces de la tangente s sur les côtés du triangle XYZ, les droites $S_1\sigma_1$, $S_2\sigma_2$, $S_3\sigma_3$ sont tangentes à la courbe C_3^4. Le théorème de Desargues appliqué aux

---

(*) E. Weyer, *Théorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde*, p. 84; J. Neuberg, *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége*, 1906, p. 15.

quadrangles $XP_{11}PS$, $YP_{22}PS$, $ZP_{33}PS$, inscrits dans Σ, donnent l'involution unique

$$(A\pi_1,\ B\pi_2,\ C\pi_3,\ A'\sigma_1,\ B'\sigma_2,\ C'\sigma_3,\ \pi\varpi,\ EF).$$

Les trois premiers couples de cette involution proviennent des couples de tangentes menées des points P_1, P_2, P_3 de la tangente p. Par suite, les tangentes issues des points A' et σ_1, B' et σ_2, C' et σ_3 se coupent sur la tangente p. Ainsi

Les tangentes XA' *et* $S_1\sigma_1$, YB' *et* $S_2\sigma_2$, ZC' *et* $S_3\sigma_3$ *de la courbe* C_3^4, *passant par les sommets opposés du quadrilatère complet formé par les quatre tangentes* XY, YZ, ZX, *s se coupent en trois points de la tangente* p.

La tangente p est la corésiduelle des quatre tangentes considérées; sa construction est aisée si l'on connaît ces quatre tangentes. La droite AS rencontre Σ en P_{11} (8), les droites XP_{11}, $A'P_{11}$ coupent respectivement EF, YZ aux points π et P_1 de la tangente p.

Les données p, XY, YX, ZX permettent de construire la tangente s formant avec XY, YZ, ZX le quaterne dont p est la corésiduelle. La droite $X\pi$ coupe Σ en P_{11}; la droite AP_{11} rencontre Σ en S. De ce point on déduit s.

20. Par le point ps passe une troisième tangente à la courbe C_3^4; elle détermine sur EF le point ρ conjugué de σ dans l'involution $(A'\sigma_1,\ B'\sigma_2,\ C'\sigma_3,\ EF)$ (19). Le quadrangle $SSXS_{11}$ inscrit dans Σ détermine sur EF l'involution $(A'\sigma_1,\ \sigma S_p,\ EF)$ en désignant par S_p la trace sur EF de la tangente en S à la conique Σ; par suite, $S_p \equiv \rho$. Ainsi

La corésiduelle p *du quaterne* (XY, YZ, ZX, *s*) *rencontre* s *en un point tel que la troisième tangente à la courbe* C_3^4 *passant par ce point, la tangente double* EF *et la tangente en* S *à la conique* Σ *sont concourantes.*

Si q est la tangente à la courbe C_3^4 issue du point P_p (12),

l'une des involutions (12) montre que la tangente t est la corésiduelle du quaterne (XY, YZ, ZX, q). Par suite,

La tangente au point P *à la conique* Σ *rencontre* EF *en un point* P_p, *par lequel passe une tangente* q *à la courbe* C_3^4. *La corésiduelle du quaterne* (XY, YZ, ZX, q) *passe par le point de contact de la tangente* p *déduite de* P.

Corollaire. — Les droites $X\mathcal{C}$, $Y\mathcal{C}$, $Z\mathcal{C}$ rencontrent la conique Σ aux points T_{11}, T_{22}, T_{33}; les droites AT_{11}, BT_{22}, CT_{33} concourent en un point Q de la conique Σ duquel on déduit la tangente à la courbe C_3^4 issue du point P_p (8, 19).

21. Les droites $X\sigma$, $Y\sigma$, $Z\sigma$ rencontrent la conique Σ aux points S_{11}, S_{22}, S_{33}. L'involution $X(EF, B'C', \sigma\pi_1)$ (12) détermine sur Σ l'involution

$$(EF, \quad B''C'', \quad S_{11}P)$$

et les droites EF, $B''C''$, $S_{11}P$ sont concourantes. Par suite,

Les couples de droites XB′ *et* XC′, YC′ *et* YA′, ZA′ *et* ZB′ *déterminent sur la conique* Σ *trois cordes rencontrant la tangente double* EF *aux points* A_1, B_1, C_1. *Les droites* A_1P, B_1P, C_1P *passent respectivement par les points* S_{11}, S_{22}, S_{33} *où les droites* $X\sigma$, $Y\sigma$, $Z\sigma$ *rencontrent la conique* Σ.

22. Si la droite AP_{11} est tangente à la conique Σ, on a $P_{11} \equiv S$ (8), $\mathcal{C} \equiv A'$ (9); par suite (14), *les droites joignant* X *et* A′ *au point de contact d'une tangente menée du point* A *à la conique* Σ *rencontrent respectivement les droites* EF *et* YZ *en deux points situés sur une tangente à la courbe* C_3^4, *dont le point de contact est sur la tangente* XA′.

23. Soient R un point de Σ; R_{11}, R_{22}, R_{33} les seconds points d'intersection de Σ avec les droites RA′, RB′, RC′. On sait (8) que les droites AR_{11}, BR_{22}, CR_{33} concourent en un point S′ de Σ. Le quadrangle $P_{11}R_{11}SS'$ coupé par la trans-

versale YZ montre que les points (SS', YZ) et (P_{11} R_{11}, YZ) sont conjugués dans l'involution (YZ, AA). Mais les conjugués des traces de la droite SS' sur les côtés YZ, ZX, XY, respectivement dans les involutions (YZ, AA), (ZX, BB), (XY, CC) sont en ligne droite; par suite,

Si P, R *sont deux points de la conique* Σ, P_{11}, P_{22}, P_{33}, R_{11}, R_{22}, R_{33} *les seconds points d'intersection de cette courbe avec les droites* PA', PB', PC', RA', RB', RC', *le triangle ayant pour côtés* $P_{11}R_{11}$, $P_{22}R_{22}$, $P_{33}R_{33}$ *et le triangle* XYZ *sont homologiques.*

Les droites AP_{11}, AR_{11} *rencontrent* Σ *en deux points* S, S' *tels que la droite* SS' *et l'axe d'homologie rencontrent les côtés* YZ, ZX, XY *du triangle* XYZ *en des couples de points conjugués respectivement dans les involutions* (YZ, AA), (ZX, BB), (XY, CC).

24. Les tangentes *p*, *r* de la courbe C_3^4 déduites des points P, R rencontrent la tangente double EF aux points π, ρ, et le côté YZ en P_1, R_1. Les droites P_1P_{11}, R_1R_{11} passent par A'. Les faisceaux projetant de P_{11} et R_{11} les points de EF sont coupés par YZ suivant deux ponctuelles projectives projetées des points π et ρ suivant deux faisceaux perspectifs. L'axe de perspectivité passe par l'intersection des tangentes $\pi P_1 \equiv p$, $\rho R_1 \equiv r$ ainsi que par le point (YZ, P_{11} R_{11}).

Si dans la génération de la courbe C_3^4 (5) le point A' varie sur EF, on obtient une infinité de courbes C_3^4 inscrites au triangle XYZ, et l'axe de perspectivité trouvé est le milieu des points d'intersection des tangentes menées des points π et ρ à ces courbes. Par suite, cet axe ne dépend que de π et ρ, et dans sa détermination ci-dessus on peut remplacer P_{11}, R_{11}, YZ, soit par P_{22}, R_{22}, ZX, soit par P_{33}, R_{33}, XY; il en résulte que cet axe joint les points (YZ, $P_{11}R_{11}$), (ZX, $P_{22}R_{22}$), (XY, $P_{33}R_{33}$) et est identique à la droite *d*. Donc

L'axe d'homologie d *des triangles* XYZ *et* ($P_{11}R_{11}$, $P_{22}R_{22}$, P_{33} R_{33}) *passe par l'intersection des tangentes* p, r *déduites des points* P, R *de la conique* Σ.

25. Les droites $P_{11}\rho$, $R_{11}\rho$ déterminent sur YZ deux points situés sur deux rayons homologues des faisceaux perspectifs (π) et (ρ); par suite,

Les droites joignant le point π *aux points* (YZ, $P_{11}\rho$), (ZX, $P_{22}\rho$), (XY, $P_{33}\rho$) *rencontrent respectivement les droites* XR_{11}, YR_{22}, ZR_{33} *sur l'axe d'homologie* d.

Le quadrangle PR P_{11} R_{11} inscrit dans Σ et coupé par YZ montre que les droites PR et *d* déterminent sur YZ deux points conjugués dans l'involution (YZ, P_1R_1). Ainsi

L'axe d'homologie et la droite PR *déterminent sur les côtés* YZ, ZX, XY *du triangle* XYZ *des couples de points conjugués dans les involutions* (YZ, P_1R_1), (ZX, P_2R_2), (XY, P_3R_3).

26. Les tangentes aux points P_{11} et S à la conique Σ, déterminent sur YZ deux points conjugués dans l'involution (YZ, AA); par suite,

Le triangle formé par les tangentes aux points P_{11}, P_{22}, P_{33} *de la conique* Σ *et le triangle* XYZ *sont homologiques. L'axe d'homologie et la tangente au point* S *de la conique* Σ *déterminent sur* YZ, ZX, XY *des couples de points conjugués dans les involutions* (YZ, AA), (ZX, BB), (XY, CC).

Cet axe d'homologie coupe la tangente p *en son point de contact.*

27. *Si trois tangentes* p, m, n *de la courbe* C_3^4 *sont concourantes, les tangentes passant par leurs points de contact jouissent de la même propriété* (*).

En effet, les côtés MN, NP, PM du triangle PMN rencontrent EF aux points P_t, M_t, N_t; les droites PP_t, MM_t, NN_t coupent une seconde fois la conique Σ aux points T, T', T'' et les tangentes déduites de ces points passent respectivement par les points de contact de *p*, *m*, *n* (15). Les quadrangles

---

(*) Mac Laurin, *Mélanges de Géométrie pure d'E. De Jonquières*, p. 223. (Corrélatif.)

MT'T''N et PPMN inscrits dans Σ déterminent sur EF la même involution

$$(EF, \quad M_t N_t, \quad P_t P_p),$$

et, par suite, la droite T'T'' passe par P_p. Mais XT passe par $\mathfrak{C}_1$ (10) et l'on a l'involution (EF, B'C', $P_p\mathfrak{C}_1$) (12); donc les points X, T, T', T'', B', C' sont sur une même conique et les tangentes déduites de T, T', T'' sont concourantes. (Rem. 13).

28. Soient $X_1Y_1Z_1$ un triangle quelconque circonscrit à la courbe C_3^4; A_1, B_1, C_1, les intersections des côtés avec la tangente double EF; A_1', B_1', C_1' les traces sur EF des troisièmes tangentes issues de X_1, Y_1, Z_1. Les involutions (18) (B_1C_1', $B_1'C_1$, EF), (B_1A_1', $B_1'A_1$, EF) établissent la projectivité

$$(A_1B_1C_1 \ldots EF) \overline{\wedge} (A_1'B_1'C_1' \ldots EF) \qquad (a)$$

et dans le mode de génération (1) de la courbe C_3^4 on peut utiliser le triangle $X_1Y_1Z_1$, la conique $\Sigma_1 \equiv (X_1Y_1Z_1EF)$ et la projectivité (*a*). Car la courbe ainsi engendrée sera l'enveloppe des droites joignant les points correspondants de la projectivité

$$(EF, \quad B_1'C_1, \quad B_1C_1', \ldots) \overline{\wedge} (A_1, \quad Y_1, \quad Z_1, \ldots),$$

c'est-à-dire la courbe C_3^4 (18). Par suite, dans tout ce qui précède, on peut considérer XYZ comme un triangle circonscrit quelconque. On en conclut aisément que *la courbe* C_3^4 *est déterminée par la tangente double* EF, *les points de contact* E, F *et quatre tangentes.* (Théorème connu.)

Remarque. — XYZ étant un triangle circonscrit quelconque, XA', YB', XC' les troisièmes tangentes issues de X, Y, Z; *p* une tangente de la courbe, les traces P_1, P_2, P_3 de *p* sur YZ, ZX, XY sont projetées des points A', B', C' de EF suivant les droites concourantes A'P_1, B'P_2, C'P_3. Si la droite *p* vient en coïnci-

dence avec YZ, on voit que les droites YC′, ZB′ se coupent sur la droite joignant le point A′ au point de contact de la tangente YZ. Si l'on applique cette propriété au triangle circonscrit XP_2P_3, on voit (19) que

Les droites $P_2\pi_3$, $P_3\pi_2$ *se coupent sur la droite joignant* A′ *au point de contact* C_p *de la tangente* p.

29. Soit U un point fixe pris arbitrairement sur la tangente double EF ; on a identiquement (notations 1)

$$(EFUB)\,(EFUC)\,(EFUA') = (EFUB')\,(EFB'B)\,(EFUC)\,(EFUA)\,(EFAA').$$

D'après la projectivité

$$(ABC\ldots EF) \overline{\wedge} (A'B'C'\ldots EF),$$

on a

$$(EFBB') = (EFAA');$$

donc

$$(EFUB)\,(EFUC)\,(EFUA') = (EFUC)\,(EFUA)\,(EFUB'),$$

égalité d'où l'on déduit aisément que

Si U *est un point fixe de la tangente double* EF ; B, C, A′ *les traces sur la même droite de trois tangentes concourantes quelconques* XB, XC, XA′, *le produit*

$$(EFUB)\,(EFUC)\,(EFUA')$$

est constant.

C'est le théorème de M. Humbert relatif à l'hypocycloïde à trois rebroussements énoncé sous forme projective (*).

(*) Humbert (N.-A.-M.), 1893, p. 49. Neuberg, *loc. cit.*, p. 13.

§ II. — Tangentes correspondantes.

30. Deux tangentes v, v' à la courbe C_3^4 dont les points de contact sont situés sur une même tangente p de cette courbe sont dites correspondantes (13). Elles sont déduites de deux points V, V′ de la conique Σ, alignés sur le pôle L de EF relativement à Σ. Par suite (6), *deux tangentes correspondantes déterminent sur la tangente double* EF *deux points conjugués par rapport aux points* E *et* F. (Steiner, *loc. cit.*, p. 642.)

31. Les tangentes correspondantes p, p' ont leurs points de contact sur la tangente t (13). Soient t' la correspondante de t; P, P′, T, T′ les points de Σ desquels on déduit les tangentes p, p', t, t'. Les droites TP, T′P′ se coupent sur EF (30); la droite T′P′ passe donc par le point σ (11) et les tangentes p, p', t' sont concourantes (13). Ainsi

La tangente t′ *issue du point de rencontre de deux tangentes correspondantes* p, p′ *est la correspondante de la tangente* t *passant par leurs points de contact* (*).

32. Soient p', m', n' les correspondantes de trois tangentes concourantes p, m, n; P, P′, M, M′, N, N′ les points de la conique Σ desquels on les déduit. Par hypothèse les points σ, M, N sont en ligne droite (13); par suite, la droite M′N′ passe par le point σ (30) et les tangentes p, m', n' sont concourantes (13). Par analogie les ternes (m, p', n'), (n, p', m') jouissent de la même propriété. On en conclut :

Si p′, m′, n′ *sont les correspondantes de trois tangentes concourantes* p, m, n, *les droites* p *et* p′, m *et* m′, n *et* n′ *sont les côtés opposés d'un quadrangle complet* (**).

Corollaire. Deux couples de tangentes correspondantes p

(*) Mac Laurin, *loc. cit.*, p. 238; Steiner, *loc. cit.*, p. 642.
(**) Id., *ibid.*, p. 237; Id., *ibid.*, p. 643.

et p', m et m' déterminent un troisième couple de tangentes correspondantes n et n' joignant les couples de points pm et $p'm'$, pm' et $p'm$.

33. On désigne par G, G', I' les points d'intersection de XP_{11} avec les droites MN, M'N', $L\sigma$ (32). La section du faisceau harmonique σ (ELMM') par la droite XP_{11} est la ponctuelle harmonique (πI'GG'). Les droites A'G, A'G' rencontrent la tangente p aux points Q et Q' où concourent respectivement les tangentes m et n, m' et n' (13); donc A'I' coupe p en un point I tel que

$$(\pi IQQ') = -1.$$

Par suite, *Les tangentes correspondantes déterminent sur une tangente fixe* p *des couples de points* Q *et* Q' *conjugués dans une involution* (QQ'). *Un point double* π *de cette involution est sur la tangente double* EF (*).

La droite joignant le point σ (11) *au pôle* L *de* EF *par rapport à la conique* Σ *rencontre les droites* XP_{11}, YP_{22}, ZP_{33} *en trois points* I', I'', I''' *tels que les droites* A'I', B'I'', C'I''' *concourent au second point double* I *de l'involution* (QQ').

34. On a vu (31) que les tangentes p, p', t' sont concourantes; les tangentes t, t' déterminent sur p deux points conjugués de l'involution (QQ'); la tangente t passe par le point de contact de p (14); par suite, *le point* pp' *et le point de contact de la tangente* p *sont conjugués dans l'involution* (QQ') (**).

35. Soient p, p' deux tangentes correspondantes variables; P, P' les points de Σ desquels elles sont déduites. Le faisceau

---

(*) Mac Laurin, *loc. cit.*, p. 238; Cremona, *loc. cit.*, p. 102.

(**) Mac Laurin, *loc. cit.*, p. 238. (Corrélatif.)

harmonique A′(PP′EL) est coupé par YZ suivant la ponctuelle harmonique ($P_1P_1'AA_1$); les points P_1, P_1' appartenant respectivement aux tangentes p, p' (2), le point A_1 est un élément double de l'involution déterminée sur YZ par les tangentes correspondantes. Par suite,

Les tangentes correspondantes déterminent sur les côtés d'un triangle XYZ *circonscrit à la courbe* C_3^4 *des involutions ayant respectivement pour éléments doubles* A *et* A_1, B *et* B_1, *et* C *et* C_1; *les trois points* A, B, C *sont sur la tangente double* EF. *Si* A′, B′, C′ *sont les traces sur* EF *des troisièmes tangentes issues des sommets* X, Y, Z, *les droites* $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$ *concourent au pôle* L *de la droite* EF *relativement à la conique* $\Sigma \equiv (XYZEF)$.

36. Le couple de points $\pi \equiv (EF, p)$, $\pi' \equiv (EF, p')$ décrit une involution $(\pi\pi')$ (30) projective à la ponctuelle (α) décrite par le conjugué α du point A relativement au couple $\pi\pi'$. Les ponctuelles harmoniques $(AA_1P_1P_1')$, $(A\alpha\pi\pi')$ sont perspectives et le point d'intersection des droites $p \equiv \pi P_1$, $p' \equiv \pi' P_1'$ est situé sur le rayon $A_1\alpha$. Ce rayon décrit autour du point A_1 un faisceau projectif à la ponctuelle (α) et, par suite, projectif à l'involution $(\pi\pi')$. On en conclut :

Les faisceaux qui projettent des points A_1, B_1, C_1 (35) *les points d'intersection* pp′ *des tangentes correspondantes variables* p, p′ *sont projectifs.*

Le point pp′ *décrit une conique* Φ *passant par les points de contact de la tangente double* EF (*).

Car si π coïncide avec E, pp' est identique à E.

37. — Les points de contact C_p, $C_{p'}$ des tangentes correspondantes p, p' sont sur une tangente t (30); soient $H \equiv (pp')$, $G \equiv (C_p\pi', C_{p'}\pi)$, $\mathfrak{C} \equiv (EF, t)$, $K \equiv (EF, HG)$, $U \equiv (t, HG)$. De

(*) Steiner, *loc. cit.*, p. 642; Cremona, *loc. cit.*, p. 103. On peut aussi déduire cette propriété du n° 17.

la ponctuelle harmonique $(C_p C_{p'} U\mathfrak{C})$ on déduit que U est un élément double de l'involution déterminée sur t par les tangentes correspondantes (33); il appartient à la conique Φ (36). La troisième tangente issue de H est la correspondante t' de t (31), elle coupe t en un point U′ de Φ (36). Les droites $t' \equiv U'H$ et $t \equiv U'U$ rencontrent EF en deux points conjugués par rapport à E et F (31); par suite, les points H et U sont alignés sur le pôle Ω de EF par rapport à la conique Φ. On a

$$(HGUK) = -1. \qquad (HUK\Omega) = -1;$$

donc

$$(\Omega KGH) = -3,$$

et les points G et H se correspondent dans une homologie dont le centre et l'axe sont Ω et EF et le coefficient d'homologie -3. On en conclut :

La conjuguée $C_p\pi'$ *de la tangente* p *par rapport aux points* E *et* F *est l'homologue de la tangente* p′ *dans une homologie dont l'axe est la tangente double* EF, *le centre le pôle* Ω *de cette droite* EF *par rapport à la conique* Φ *et dont le coefficient d'homologie est égal à* -3. *Cette conjuguée* $C_p\pi'$ *enveloppe donc la courbe correspondant à la courbe* C_3^4 *dans cette homologie* (*).

38. — Quand la tangente p passe par Ω, elle coïncide avec sa correspondante $C_{p'}\pi$ dans l'homologie (Ω, EF, $\lambda = -3$); le point $C_{p'}$ est donc sur p et $p \equiv t$. Ainsi par le point de contact d'une tangente à la courbe C_3^4 issue Ω ne passe aucune autre tangente. Ces points sont les seuls points du plan autres que E et F jouissant de cette propriété. Car si t coïncide avec p on a $p \equiv C_{p'}\pi$ et la droite p passe par Ω. Ainsi

Les tangentes à la courbe C_3^4 *issues du pôle* Ω *de la tangente*

(*) Cremona, *loc. cit.*, p. 107; Painvin (N.-A.-M.), 1870, p. 270.

double EF *relativement à la conique* Φ *sont les tangentes de rebroussement de cette courbe* (*).

On désignera ces tangentes par d_1, d_2, d_3 et les points de rebroussement par D_1, D_2, D_3.

39. — Une tangente quelconque p rencontre la conique Φ en deux points pp' et I (33, 36) en général distincts. Dans cette hypothèse le point I ne peut appartenir à la courbe C_3^4, sinon l'une des tangentes correspondantes qui se coupent en I serait p et l'autre nécessairement p'. Par le point pp' passent les tangentes p, p', t' (31); ce point ne peut être situé sur C_3^4 qu'à la condition que l'une des tangentes p, p', par exemple p, coïncide avec t'. Dans ce cas t est identique à p' et cette dernière est une tangente de rebroussement (38). Les tangentes correspondantes issues du point I proviennent de deux points de la conique Σ conjugués dans les involutions ayant pour pôles le point L (30) et le point P_t (12). Puisque $t \equiv p'$, ces points sont P et $T \equiv P'$; par suite, $I \equiv pp'$. Il en résulte :

La conique Φ *est tangente à la courbe* C_3^4 *en trois points* N_1, N_2, N_3 *qui sont les points de contact des tangentes* n_1, n_2, n_3 *respectivement correspondantes des tangentes de rebroussement* d_1, d_2, d_3.

Les points N_1, N_2, N_3 *sont respectivement les points d'intersection des droites* n_1 *et* d_1, n_2 *et* d_2, n_3 *et* d_3. *Ces points avec* E *et* F *sont les seuls points communs à la conique* Φ *et à la courbe* C_3^4 (*).

40. Les tangentes n_1, n_2, n_3 forment un triangle dont les sommets n_2n_3, n_3n_1, n_1n_2 sont respectivement sur d_1, d_2, d_3 (32). Le point Ω étant le pôle de EF par rapport à la conique Φ, les points $N_{11} \equiv (n_1, N_2N_3)$, $N_{22} \equiv (n_2, N_3N_1)$, $N_{33} \equiv (n_3, N_1N_2)$ sont situés sur EF. Ainsi

Les tangentes à la conique Φ *aux sommets du triangle*

(*) Steiner, *loc. cit.*, pp. 642-643.

$N_1N_2N_3$ *rencontrent les côtés opposés en trois points* N_{11}, N_{22}, N_{33} *situés sur* EF (*).

41. Une tangente de rebroussement est réelle (38, 3) ; par suite, l'un des points N_1, N_2, N_3 est aussi réel. Ces points N_1, N_2, N_3 constituent un terne de la projectivité cyclique sur la conique Φ ayant pour éléments doubles E, F. Donc

Les points de rebroussement de la courbe C_3^4 *sont réels si les points de contact de la tangente double* EF *sont imaginaires conjugués et réciproquement* (*).

42. Dans l'homologie harmonique ayant pour centre et pour axe le point $N_{11} \equiv (n_1, \text{EF})$ (40) et la tangente de rebroussement d_1, aux éléments EF, E, F, d_1, n_1, n_2, n_3, suffisants pour déterminer la courbe C_3^4 (28), correspondent respectivement EF, F, E, d_1, n_1, n_3, n_2. Par suite,

Si N_{11}, N_{22}, N_{33} *désignent les traces des tangentes* n_1, n_2, n_3 *sur la tangente double* EF, *la courbe* C_3^4 *est conservée dans les homologies harmoniques* (N_{11}, d_1), (N_{22}, d_2), (N_{33}, d_3) (**).

43. Lorsque la tangente p est une tangente de rebroussement, on a $C_{p'} \equiv pp'$ (38) ; et dans l'homologie $(\Omega, \text{EF}, \lambda = -3)$ les droites $C_p\pi'$, p' sont correspondantes (37) ; par suite, les points C_p et $C_{p'}$ sont homologues. Ainsi *les points* D_1 *et* N_1, D_2 *et* N_2, D_3 *et* N_3 *sont correspondants dans l'homologie* $(\Omega, \text{EF}, \lambda = -3)$. On en conclut :

La conique Ψ *passant par les points de rebroussement et les points* E, F *correspond à la conique* Φ *dans l'homologie* $(\Omega, \text{EF}, \lambda = -3)$. *Ces deux coniques ont un double contact sur la tangente double* EF (***).

(*) Steiner, *loc. cit.*, pp. 642-643.
(**) Mac Laurin, *loc. cit.*, p. 228. (Corrélatif.)
(***) Steiner, *loc. cit.*, p. 643.

44. La tangente $t \equiv C_p C_{p'}$ coupe EF au point τ; la droite $\Omega\tau$ rencontre $C_p\,\pi'$ et p' aux points L′ et W′. On a (37)

$$-1 = \mathcal{T}(\Omega K U H) = (W'\pi' C_{p'} H);$$

donc (34), W′ est un point double de l'involution déterminée sur la tangente p' par les tangentes correspondantes et il est situé sur la conique Φ. Le point W′ est d'ailleurs l'homologue du point L′ dans l'homologie (Ω, EF, $\lambda = -3$) (37); par suite, L′ est sur la conique Ψ (45). Donc

Si la tangente $t \equiv C_p C_{p'}$ *rencontre la tangente double* EF *au point* τ, *la droite* $\Omega\tau$ *coupe les tangentes* p, p′ *sur la conique* Φ *et les droites* $C_p\,\pi'$, $C_{p'}\pi$ *sur la conique* Ψ.

Remarque. — Le point $W \equiv (\Omega\tau, p')$ appartenant à la conique Φ est l'intersection de deux tangentes correspondantes; leurs points de contact sont sur la tangente p (31).

45. Deux tangentes correspondantes variables p, p' rencontrent la conique Φ aux points $H \equiv p\,p'$, I, I′. Les points I, I′ décrivent sur Φ une involution (II′) dont le pôle est le point Ω (37). Le faisceau harmonique H ($AA_1P_1P_1'$) (36) détermine sur Φ la ponctuelle harmonique ($A_1'A_1II'$). Le point A_1 étant fixe, le point A_1' décrit sur Φ une ponctuelle (A_1') projective à l'involution (II′). Les points A_1' et H alignés sur le point fixe A décrivent les ponctuelles involutives (A_1') et (H). Par suite,

La ponctuelle (H) *est rapportée projectivement à l'involution* (II′). *Les points* E, F, N_1, N_2, N_3 (39) *de la ponctuelle* (H) *correspondent respectivement aux couples* FF, EE, $N_1\,D_1'$, $N_2\,D_2'$, $N_3\,D_3'$ *de l'involution* (II′).

Corollaire I. — Deux tangentes p, q de la courbe C_3^4 rencontrent la conique Φ aux points H et I, H_1 et I_1; on a

$$(HH_1EF) = \Omega(II_1EF).$$

Si les points E, F sont les points cycliques on retrouve le mode de génération de l'hypocycloïde à trois rebroussements : l'arc HH_1 du cercle Φ est le double de l'arc II_1.

Corollaire II. — On a

$$(HN_1N_2N_3) = \Omega(IN_1N_2N_3).$$

Corollaire III. — Si A_1 est un point fixe de la conique Φ choisi arbitrairement, le lieu du point (A_1H, II') est une conique Θ passant par les points A_1, Ω, N_1, N_2, N_3, $(A_1E, \Omega F)$, $(A_1F, \Omega E)$; les points E, F sont donc conjugués par rapport à la conique Θ. On déduit de là : Par les points Ω, N_1, N_2, N_3 on fait passer une conique quelconque Θ coupant Φ en un quatrième point A_1; une droite issue de Ω rencontre la conique Φ aux points I, I′ et la conique Θ au point U; la droite A_1U détermine sur Φ le point H; les droites HI, HI′ enveloppent la courbe C_3^4 (*).

Corollaire IV. — Une droite quelconque issue d'un point H pris arbitrairement sur la conique Φ rencontre cette courbe en A_1' et la tangente EF en A. Si A_1 est le conjugué harmonique de A_1' relativement au couple II′ de l'involution, homologue de H, la droite A_1A est tangente à la courbe C_3^4 et le point A_1 est un élément double de l'involution déterminée sur AA′ par les tangentes correspondantes.

On peut supposer le point A_1' fixe et le point H mobile sur la conique Φ; les ponctuelles (A) sur EF et (H) sur Φ sont projectives; la ponctuelle (A_1) et l'involution (II′) sont projectives; par suite, *les points* A_1 *et* A *de la tangente* A_1A *décrivent respectivement sur la conique* Φ *et la tangente double* EF *deux ponctuelles* (A_1) *et* (A) *projectives dans lesquelles les points* E *et* F *de l'une correspondent respectivement aux points* F *et* E *de l'autre* (**).

(*) Laguerre, *Œuvres*, t. II, p. 477.

(**) Schroeter, *Journal de Crelle*, t. 54, p. 38; Neuberg, *loc. cit.*, p. 5.

§ III. — Sur la courbure de la courbe C_3^4.

46. *Une tangente variable* p *de la courbe* C_3^4 *rencontre la tangente fixe* x *et la tangente double* EF *aux points* P_1 *et* π. *Si l'on désigne par* X *le point de contact de* x, *par* Y_1 *la trace sur* EF *de la seconde tangente* y *issue de* X, *le point d'intersection des droites* $X\pi$, Y_1P_1 *décrit une conique* Σ_1 *tangente en* X *à la courbe* C_3^4, *passant par les points* E, F *et dont le rayon de courbure au point* X *est égal au quart de celui de la courbe au même point.*

Soient p_1 la troisième tangente issue de P_1, π' sa trace sur EF; lorsque P_1 se déplace sur la tangente x, l'involution de rayons X $(\pi\pi_1)$ et le faisceau Y_1 (P_1) sont projectifs (24). Cette projectivité a un élément uni XY_1 et engendre une conique Σ_1, lieu du point $P_{11} \equiv (X\pi,\ Y_1P_1)$. Le couple XE, XF est l'homologue du rayon Y_1E (24) et la conique Σ_1 passe par les points E et F. Cette courbe Σ_1 est d'ailleurs la limite de la conique Σ circonscrite au triangle XYZ (7) lorsque deux des tangentes XY, YZ, ZX de la courbe C_3^4 tendent indéfiniment vers la troisième; par suite, le rayon de courbure de Σ_1 en X est égal au quart du rayon de courbure de la courbe C_3^4 au même point (*).

Corollaire. — *Si* Z_1, Z_2 *sont les points de la courbe* C_3^4 *situés sur la tangente* x, *les droites* Y_1Z_1, Y_1Z_2 *sont tangentes à la conique* Σ_1.

47. Si W désigne le point $(x,\ Y_1\Omega)$, Ω étant le pôle de EF par rapport à la conique Φ, X_1 le point $(EF,\ x)$,

$$(Z_1Z_2X_1W) = -1;$$

(*) *Mathesis*, 1889, p. 105.

car W appartient à la conique Φ (44) et est un point double de l'involution déterminée sur x par les tangentes correspondantes. Les droites Y_1Z_1, Y_1Z_2 étant tangentes à la conique Σ_1, l'égalité

$$Y_1(Z_1Z_2X_1W) = -1$$

montre que le pôle L_1 de EF par rapport Σ_1 est situé sur $Y_1\Omega$. La tangente x' correspondante de x coupe EF en un point X_1', et, d'après l'égalité (50)

$$(X_1X_1'EF) = -1,$$

la droite XX_1' est la polaire de X' relativement à Σ_1. Le pôle L_1 est donc à l'intersection des droites $Y_1\Omega$ et XX_1' ; par suite (44), il appartient à la conique Ψ. Ainsi *le pôle* L_1 *de la tangente double* EF *par rapport à la conique* Σ_1 *est situé sur la conique* $\psi \equiv (D_1, D_2, D_3, E, F)$.

48. Au point de contact X' de la tangente x' on a une conique Σ_1' tangente à la courbe C_3^4, analogue à Σ_1. La droite X_1X' rencontre $Y_1\Omega$ au pôle L_1' de EF relativement à cette conique Σ_1'. Donc

Les pôles de tangente double EF *par rapport aux coniques* Σ_1, Σ_1' *relatives aux points de contact* X, X' *de deux tangentes correspondantes* x, x' *sont alignés sur le pôle de* EF *relativement à la conique* Φ.

49. La tangente x' coupe $Y_1\Omega$ en un point W' par lequel passent les tangentes aux points Z_1, Z_2 (Remarque 45) ; il en résulte (37) que si z_1, z_2 désignent les traces de ces tangentes sur EF, les droites z_1Z_2, z_2Z_1 se coupent au point L_1. Ainsi

Si z_1, z_2 *sont les traces sur la tangente double* EF *des tangentes dont les points de contact* Z_1, Z_2 *sont sur la tangente* x, *les droites* z_1Z_2, z_2Z_1 *passent par le pôle* L_1 *de la tangente double* EF *relativement à la conique* Σ_1.

50. Étant donnés un point X de la courbe C_3^4, la tangente x en ce point, les points de contact E, F de la tangente double EF, construire le rayon de courbure au point X en supposant comme éléments également connus :

1° La tangente y issue de X et une tangente p;

2° Deux tangentes quelconques p et r.

Dans la première hypothèse on a immédiatement le point $P_{11} \equiv (X\pi, Y_1P_1)$ (46) et le problème est ramené à la construction du rayon de courbure au point X de la conique Σ_1 déterminée par X, x, E, F, P_{11}.

Dans la seconde hypothèse, soient

$$R_1 \equiv (x, r), \quad \rho \equiv (EF, r), \quad R_{11} \equiv (X\rho, R_1Y_1), \quad H \equiv (EF, P_{11}R_{11}),$$
$$U \equiv (R_1\pi_1, P_{11}R_{11}), \quad U' \equiv (P_1\rho, P_{11}R_{11}), \quad V \equiv (x, P_{11}R_{11}).$$

On a

$$(R_1XVX_1) = (UP_{11}VH) \qquad (P_1XVX_1) = (U'R_{11}VH);$$

d'où

$$(R_1P_1VX_1) = (UU'VH) \cdot (R_{11}P_{11}VH).$$

Mais

$$(R_1P_1VX_1) = (R_{11}P_{11}VH);$$

donc $U \equiv U'$. Par suite,

Si p, r *sont deux tangentes quelconques à la courbe* C_3^4; π, ρ, P_1, R_1 *leurs traces sur la tangente double* EF *et sur la tangente* x; P_{11}, R_{11} *les secondes intersections des droites* $X\pi$, $X\rho$ *avec la conique* Σ_1, *le point* $U \equiv (P_1\rho, R_1\pi)$ *est situé sur la droite* $P_{11}R_{11}$.

La conique Σ_1, les couples de droites (XR_{11}, XP_{11}), $(x, P_{11}R_{11})$ déterminent sur EF des couples de points en involution. Par suite, connaissant le point U, la droite $P_{11}R_{11}$ est le rayon de l'involution U (EF, π_ρ) conjugué au rayon UX_1. La droite $P_{11}R_{11}$ étant construite, on a immédiatement les points P_{11}, R_{11}, et la conique Σ_1 est déterminée.

51. La conjuguée x_p de la tangente x par rapport aux tangentes p, p_1 menées du point P_1 de x à la courbe C_3^4 détermine sur EF le conjugué harmonique X_p du point $X_1 \equiv (x, EF)$ par rapport au couple $\pi\pi_1$. Par suite, si P_1 varie, la ponctuelle (X_p) est projective à la ponctuelle (P_1) (18) et *la droite* x_p *enveloppe une conique* (σ), *conique pôle de la tangente* x.

Aux couples EF, X_1X_1' de l'involution $(\pi\,\pi_1)$ correspondent les points X_1 et X de la ponctuelle (P_1); ces points sont donc les homologues de X_1' et X_1 de la ponctuelle (X_p) ; par suite

La conique pôle (σ) *est tangente aux droites* x *et* EF *aux points* X *et* X_1'.

On voit immédiatement que *si* Z_1, Z_2 *sont les points de la courbe* C_3^4 *situés sur la tangente* x, *les tangentes à la courbe en ces points sont tangentes à la conique* σ (*).

52. Ces tangentes passent par le point W' (49), et, d'après la propriété (49), le point L_1 est sur la polaire de W' relativement à la conique (σ). Les points L_1 et X_1 sont d'ailleurs conjugués par rapport à (σ). Donc

La polaire du point L_1 (47) *relativement à la conique pôle* (σ) *joint le point* $X_1 \equiv (x, EF)$ *au point d'intersection des tangentes aux points* Z_1, Z_2 *de la courbe* C_3^4.

Les droites $W'Z_1$, $W'Z_2$ séparant harmoniquement les points E, F, les secondes tangentes menées de ces points à la conique (σ) se coupent en un point G de la polaire de W' par rapport à Σ. La ponctuelle harmonique $(X_1X_1'EF)$ montre d'ailleurs que G est aussi sur la polaire de X_1 ; par suite, $G \equiv L_1$. Ainsi

Les droites L_1E, L_1F *sont tangentes à la conique* (σ).

53. On a

$$(xp_1px_p) = \frac{1}{2},$$

(*) CREMONA, *loc. cit.*, p. 111.

ou

$$\frac{\sin(xp)}{XP_1}\cdot\sin(p_1x_p)=\frac{1}{2}\quad\frac{\sin(xx_p)}{XP_1}\quad\sin(p_1p).$$

Si le point P_1 se rapproche indéfiniment du point X, $\lim p\equiv x$, $\lim XP_1 : \sin(xp)=\frac{1}{2}\rho$, $\lim XP_1 : \sin(xx_p)=\frac{1}{2}\rho_1$ ρ et ρ_1 étant les rayons de courbure en X des courbes C_3^4 et (σ), $\lim \sin(p_1x_p)=\lim\sin(p_1p)$; donc $\rho_1=\frac{1}{2}\rho$.

Le rayon de courbure ρ_1 de la conique pôle (σ) au point X *est égal à la moitié de celui de la courbe* C_3^4 *au même point* (*).

54. Il en résulte que ρ_1 est double du rayon de courbure de la conique Σ_1 (46) au point X. Ces coniques Σ_1 et (σ) tangentes en X sont homologiques, le coefficient d'homologie est égal au quotient des rayons de courbure ou $\frac{1}{2}$. L'axe d'homologie est la corde commune ; cette corde passe par X_1, qui a même polaire XX_1' relativement à Σ_1 et (σ) (47,51). Soient $G\equiv(XX_1', X'X_1)$, $H\equiv xx'$, $\mathfrak{T}\equiv(EF, XX')$; les droites $\mathfrak{T}H$ et XX_1' se coupent en un point S sur Σ_1 (46). La droite HG rencontre XX' en U et l'on a

$$(XX'U\mathfrak{T})=-1=H(XX'U\mathfrak{T})=(XX_1'GS);$$

par suite,

$$(XGSX_1')=\frac{1}{2}$$

et la droite X_1G est l'axe d'homologie de Σ_1 et σ. Ainsi *la corde commune de la conique pôle* (σ) *et de la conique* Σ_1 (46) *joint le point* (x, EF) *au point de contact* X' *de la courbe* C_3^4 *avec la tangente correspondante* x' *de* x.

55. On considère une homologie ayant pour centre le point X, pour axe la tangente x et dans laquelle le point Y_1 (46)

(*) Corrélatif d'un théorème de Moutard, N.-A.-M., 1860, p. 195.

a pour correspondant un point S pris arbitrairement sur XY_1. A la conique Σ_1 correspond une conique Σ_2 ayant en X un contact du troisième ordre avec Σ_1. Cette conique Σ_2 est engendrée par l'involution de rayons $X(\pi\pi_1)$ et par le faisceau de rayons $S(P_1)$ projectif à cette involution. Par suite, Σ_2 passe par les points de rencontre de SX_1 avec les droites XE, XF et par les traces sur EF des tangentes menées de S à la courbe C_3^4, autres que XY_1. Donc

Si S *est un point pris arbitrairement sur la tangente* XY_1 (46), s *et* s_1 *les tangentes à la courbe* C_3^4 *issues de* S *et distinctes de* XY_1, *les points* (s, EF), (s_1, EF), *les traces de* XE, XF *sur la droite joignant les points* S *et* (x, EF) *sont sur une conique* Σ_2 *ayant en* X *un contact du troisième ordre avec la conique* Σ_1 (46).

La conique Σ_2 *est tangente aux droites* SZ_1, SZ_2 (46).

56. Soient P un point de l'arête de rebroussement (C) d'une développable (D); p la tangente en ce point; S un point de p; (P) le cône projetant de P la courbe (C) : un plan passant par S coupe les surfaces (D) et (P) suivant deux courbes dont les rayons de courbure au point S sont entre eux dans le rapport 4 : 3.

En effet, soient R_1, R_1' les rayons de courbure principaux au point S de (D) et de (P); ω, ε les angles de contingence et de torsion de (C) au point P; ω' l'angle de deux génératrices infiniment voisines p, p' du cône (P); ε' l'angle des plans tangents le long de ces génératrices. On a

$$R_1 = PS\frac{\omega}{\varepsilon} \qquad R_1' = PS\frac{\omega'}{\varepsilon'} \qquad \omega' = \frac{\omega}{2} \qquad \varepsilon' = \frac{2}{3}\varepsilon;$$

donc

$$R_1 = \frac{4}{3}R_1',$$

égalité d'où l'on déduit aisément la propriété énoncée. Cette dernière est la corrélative d'un théorème de Bonnet relatif à

la section de la développable (D) coupée par l'un de ses plans tangents.

57. La développable ayant pour arête de rebroussement une cubique gauche est coupée par un plan α suivant une courbe C_3^4 (*). Soient P′ un point de la cubique gauche; p', π' la tangente et le plan osculateur en ce point; P, p leurs traces sur le plan α. Le cône (P′) perspectif à la cubique gauche est coupé par le plan α suivant une conique tangente en P à la courbe C_3^4 et passant par les points de rebroussement de celle-ci. Par suite (56),

La conique tangente en un point P *à la courbe* C_3^4 *et passant par les points de rebroussement a au point* P *un rayon de courbure égal aux trois quarts de celui de la courbe au même point.*

58. Si le plan α passe par la tangente s au point S de la cubique gauche, la section est une cubique cuspidale, S et s sont le point d'inflexion et la tangente inflexionnelle; le point de rebroussement est sur la cubique gauche. La considération du cône (P′) conduit à la propriété :

La conique tangente à une cubique cuspidale en un point P *et au point d'inflexion* S, *et passant par le point de rebroussement de la courbe, a au point* P *un rayon de courbure égal aux trois quarts de celui de la cubique au même point.*

59. Si les points E et F sont les points cycliques, la courbe C_3^4 est l'hypocycloïde de Steiner, la conique Σ_1 est le cercle décrit sur la moitié XS du rayon de courbure au point X comme diamètre (46). Par un point P du cercle Σ_1 on mène une parallèle à la tangente XY_1 (Y_1 est à l'infini sur EF); elle rencontre la tangente x au point P_1 et le cercle Σ_1 au point P_{11}; la parallèle p menée par P_1 à la droite XP_{11} est tangente à

(*) Cremona, *loc. cit.*, p. 118.

l'hypocycloïde (46). Si l'on désigne par θ et ψ les angles (x, XY_1) et (x, p), on a

$$XP_{11} = XS \sin \psi \qquad XP_{11} : XP_1 = \sin \theta : \sin (\theta + \psi);$$

par suite,

$$XS = \frac{XP_1 \sin \theta}{\sin \psi \,.\, \sin (\theta + \psi)}.$$

Ainsi *si* y *désigne la seconde tangente issue du point de contact* X *de la tangente* x *à l'hypocycloïde de Steiner ;* p *une tangente quelconque ;* P_1 *le point* xp ; θ *et* ψ *les angles* (xy), (xp) ; ρ *le rayon de courbure de la courbe au point X, on a*

$$\rho = \frac{2XP_1 \sin \theta}{\sin \psi \,.\, \sin (\theta + \psi)}.$$

60. Soient G le second point d'intersection de la tangente $y \equiv XY_1$ avec le cercle Σ_1 ; PQ la corde de ce cercle parallèle à la tangente en G : la parallèle menée par Q à la droite XG rencontre x en Q_1 et Σ_1 en Q_{11}. La droite $P_{11}Q_{11}$ est parallèle à x ; la parallèle q menée par Q_1 à la droite XQ_{11} est tangente à l'hypocycloïde. Les droites p et q se coupent en V sur y. Le triangle P_1VQ_1 étant égal au triangle isocèle $P_{11}XQ_{11}$, on conclut :

Les tangentes p, q *issues d'un point V de la tangente* y *sont également inclinées sur la tangente* x (*).

Le rayon du cercle circonscrit au triangle formé par les tangentes x, p, q *est égal au quart du rayon de courbure de l'hypocycloïde au point de contact X de la tangente* x.

Corollaire. — Soient X, X′ les points de contact de deux tangentes correspondantes x, x' ; P_1, Q_1, P_1', Q_1' les traces sur chacune d'elles des tangentes p, q issues d'un point quelconque

(*) Neuberg, *loc. cit.*, p. 13. Gob, *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége*, 1906, p. 14.

de la tangente XX′ ; ρ, ρ′ les rayons de courbure de la courbe aux points X, X′ : on a

$$\rho : \rho' = P_1Q_1 : P_1'Q_1'.$$

61. On considère la parabole inscrite au triangle *pqx*, X étant le point de contact du côté *x*; d'après le théorème de Desargues, les tangentes VP_1, VQ_1 à cette parabole, les droites projetant de V les points de contact de la tangente à l'infini et de la tangente *x* définissent une involution dont un rayon double est parallèle à *x*. Le premier couple VP_1, VQ_1 est également incliné sur *x* ; par suite, le second couple jouit de la même propriété ; donc

L'axe de la parabole inscrite au triangle pqx (X *étant le point de contact du côté* x), *et la tangente* y *sont également inclinés sur la tangente* x.

62. Cette propriété montre que le foyer G_1 de cette parabole est sur la droite *y*; il est d'ailleurs sur le cercle circonscrit au triangle P_1VQ_1, et, par suite, $VG_1 = XG$. Si l'on prend pour point V le point de contact Y de la tangente *y*, le point G_1 vient en X ; par suite,

$$VG_1 = XG = XY.$$

La distance du point V *au foyer* G_1 *de la parabole considérée est constante ; elle est égale à la tangente* XY *ou à la corde* XG *interceptée sur la tangente* y *par le cercle* Σ_1.

63. Si le point V se rapproche indéfiniment du point X, la limite de la parabole est la parabole qui suroscule l'hypocycloïde au point X ; la limite de G_1 est le point G ; par suite,

Le foyer de la parabole qui suroscule l'hypocycloïde de Steiner au point X *est le symétrique par rapport à* X *du point de contact* Y *de la seconde tangente* y *menée par* X (*).

(*) Laguerre, N.-A.-M., 1870, p. 254; Gob, *loc. cit.*, 1902, p. 8.

§ IV. — Sur les quadrangles circonscrits à la courbe C_3^4.

64. Soient XYZU un quadrangle dont les côtés sont tangents à la courbe C_3^4; I_t l'involution déterminée sur une tangente t par les tangentes correspondantes (55). Les couples de côtés opposés du quadrangle XYZU déterminent sur t des couples de l'involution I_t (52) et tout couple de points conjugués de l'involution I_t est sur une conique circonscrite au quadrangle XYZU.

65. On en conclut : *Deux quadrangles* XYZU, $X_1Y_1Z_1U_1$ *circonscrits à la courbe* C_3^4 *sont inscrits dans une même conique* (H) (*).

Cette conique rencontre la conique Φ (56) en quatre points $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. On désigne par p_1, p'_1, t'_1 les tangentes de la courbe C_3^4 issues de α_1; par P_1, P'_1, les points de contact des tangentes correspondantes p_1, p'_1 (56). Le point α_1 est un point double de l'involution $I_{t'}$ et la conique (H) est tangente au point α_1 à t'_1 (64). Les points α_1 et P_1 sont conjugués dans l'involution I_{p_1} et la conique (H) passe par P_1. Donc

Les points de contact P_1 *et* P'_1, P_2 *et* P'_2, P_3 *et* P'_3, P_4 *et* P'_4 *des couples de tangentes correspondantes issues des points* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ *communs aux coniques* (H) *et* Φ *appartiennent à la conique* (H). *Les correspondantes* t'_1, t'_2, t'_3, t'_4 *des tangentes* $t_1 \equiv P_1P'_1$, $t_2 \equiv P_2P'_2$, $t_3 \equiv P_3P'_3$, $t_4 \equiv P_4P'_4$ *sont tangentes à la conique* (H) *respectivement aux points* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. (Gob, 1909, p. 12.)

Les points P_1, P'_1,... sont les seuls communs à la courbe C_3^4 et à la conique (H); car si P est un tel point, la tangente p en P à C_3^4 rencontre la conique Φ en deux points dont l'un α est le conjugué de P dans l'involution I_p; par suite, α appartient à (H) (64) et est l'un des points $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

(*) Steiner, *loc. cit.*, p. 45.

66. Soient T_1, T_2, T_3, T_4 les points de contact des tangentes t_1, t_2, t_3, t_4 de la courbe C_3^4. Sur les courbes unicursales Φ et C_3^4 les éléments α_1 et t_1, dont l'un détermine géométriquement l'autre, décrivent des formes projectives. Le faisceau de coniques (H) circonscrites au quadrangle XYZU détermine sur la conique Φ des quaternes $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ appartenant à une involution du quatrième ordre et du premier rang. A cette dernière correspond sur la courbe C_3^4 une involution analogue formée par les quaternes (t_1, t_2, t_3, t_4). Soient X_1 et X_1', Y_1 et Y_1', Z_1 et Z_1' les points de contact des tangentes correspondantes YZ et XU, ZX et YU, XY et ZU; les tangentes X_1X_1', Y_1Y_1', Z_1Z_1' passent par un même point H (27). Les quaternes (YZ, XU, X_1X_1', X_1X_1'), (ZX, YU, Y_1Y_1', Y_1Y_1'), (XY, ZU, Z_1Z_1', Z_1Z_1') sont les quaternes (t_1, t_2, t_3, t_4) relatifs aux coniques dégénérées du faisceau (XYZU). Ces quaternes font partie de l'involution du quatrième ordre et du premier rang déterminée sur la courbe C_3^4 par les tangentes dont les points de contact sont alignés sur H. Cette involution et la précédente ont trois groupes communs et sont identiques. Donc *les cordes* P_1P_1', P_2P_2', P_3P_3', P_4P_4' *communes à la conique* (H) *et à la courbe* C_3^4 *sont tangentes à cette dernière respectivement aux points* T_1, T_2, T_3, T_4 *situés sur une droite* d. *Cette droite passe par le point concours* H *des droites joignant les points de contact de la courbe* C_3^4 *avec les côtés opposés du quadrangle* XYZU (*).

67. Le faisceau de coniques (XYZU) et le faisceau des droites *d* correspondantes sont projectifs; ils engendrent une courbe du troisième ordre circonscrite au quadrangle XYZU et passant par H. Les coniques dégénérées du faisceau conduisent aux points (X_1, X_1'), (Y_1, Y_1'), (Z_1, Z_1') (66) de la cubique. Une conique du faisceau passe par le point N_1 (39) de la conique Φ; si $\alpha_1 \equiv N_1$ on a $P_1 \equiv N_1$, $P_1' \equiv D_1$, $T_1 \equiv D_1$ et le point D_1 est sur la cubique. Une conique du faisceau est circonscrite au quadrangle $(\Omega, u_2u_3, u_3u_1, u_1u_2)$ (64); la droite *d* relative à

(*) Gob, *loc. cit.*, 1909, p. 14.

cette conique passe par le point de concours Ω des droites joignant les points de contact des côtés opposés de ce quadrangle ; donc Ω est un point de cubique. Ainsi

Les sommets d'un quadrangle XYZU *circonscrit à la courbe* C_3^4, *les points de contact des six côtés, les points de rebroussement de la courbe, le point de rencontre* Ω *des tangentes de rebroussement et le point de concours* H *des droites joignant les points de contact des côtés opposés du quadrangle sont sur une même courbe du troisième ordre* (*).

68. La projectivité du faisceau (XYZU) et du faisceau des droites *d* montre que *les côtés du triangle* XYZ *déterminent sur les droites* UD_1, UΩ *les ternes de points* X'Y'Z', X''Y''Z'' *tels que*

$$(X'Y'Z'D_1) = H(X_1Y_1Z_1D_1), \quad (X''Y''Z''\Omega) = H(X_1Y_1Z_1\Omega),$$

$X_1Y_1Z_1$ *étant les points de contact de ce triangle.*

69. Une conique (H) est circonscrite aux quadrangles XYZU et $(\Omega, n_2n_3, n_3n_1, n_1n_2)$; d'après le théorème de Desargues appliqué au quadrangle XYZU, inscrit dans (H), les points d'intersection de cette conique avec la droite EF sont conjugués par rapport aux points E, F (30) ; par suite, la conique (H) est harmoniquement circonscrite à la conique Φ. La conique Φ est d'ailleurs circonscrite au triangle $N_1N_2N_3$ conjugué à (H) ; par suite, les points d'intersection α_1, α_2, α_3, α_4 des deux coniques (H) et Φ forment sur chacune d'elles un groupe équianharmonique. Il en est de même des tangentes t_1, t_2, t_3, t_4 (66) à la courbe C_3^4. Leurs points de contact sont d'ailleurs sur une droite *d* issue de Ω (67) ; par suite,

Une droite issue du point Ω *rencontre la courbe* C_3^4 *en quatre points* T_1, T_2, T_3, T_4 ; *les tangentes en ces points forment sur celle-ci un groupe équianharmonique.*

(*) Les tangentes de rebroussement de la courbe C_3^4 coupent la tangente double EF en trois points de cette cubique.

70. Les ternes de tangentes issues des points de la droite ΩT_1 déterminent sur la tangente double EF une involution du troisième ordre et du premier rang ; les traces $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_3$, $\mathcal{T}_4$ des tangentes à la courbe C_3^4 aux points T_1, T_2, T_3, T_4 sont les points doubles de l'involution ; par suite (69), cette involution est sibi conjuguée. On en conclut que *les secondes tangentes issues des points* T_1, T_2, T_3, T_4 *alignés sur* Ω, *déterminent sur la tangente double* EF *un groupe* $(\mathcal{T}_1'\mathcal{T}_2'\mathcal{T}_3'\mathcal{T}_4')$ *équianharmonique*.

Car $\mathcal{T}_1'$, $\mathcal{T}_2'$, $\mathcal{T}_3'$, $\mathcal{T}_4'$ sont les points de ramification de l'involution considérée.

D'après les propriétés de l'involution cubique sibi conjuguée on a aussi les égalités

$$(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1'\mathcal{T}_2') = 3, \qquad (\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\mathcal{T}_3'\mathcal{T}_4') = -1.$$

§ V. — Triangles inscrits et circonscrits à la courbe C_3^4.

71. Soient sur la conique Σ un terne PQR de la projectivité cyclique ayant pour éléments doubles E, F ; P', Q', R' les conjugués de P, Q, R par rapport aux points E, F. On sait que

$$(PP'QR) = -1, \quad (QQ'RP) = -1, \quad (RR'PQ) = -1.$$

Lorsque le point P décrit la courbe Σ, on a les ponctuelles du second ordre (P), (Q), (R) projectives entre elles. La ponctuelle (P) est projective à la ponctuelle (π) (6), laquelle est projective à la ponctuelle (σ) (Corol. 17). La ponctuelle (σ) est rapportée projectivement à l'involution décrite sur Σ par le couple VV' (15) ; par suite, les ponctuelles (P), (Q), (R) sont projectives à l'involution (VV'). La projectivité $(Q)\overline{\wedge}(VV')$ a trois éléments doubles. On conservera les mêmes lettres P, Q, R pour désigner un terne particulier de la projectivité cyclique (EE, FF) pour lequel $Q \equiv V$; alors $Q' \equiv V'$. D'après l'égalité $(QQ'RP) = -1$ la droite PR passe par le pôle σ de VV' relatif à Σ et l'on a $R \equiv T$ (11). Par suite, le couple PP' de l'involution

(VV') correspond au point R ≡ T de la ponctuelle (P). Mais au point R de la ponctuelle (P) correspond le point P de la ponctuelle (Q); par conséquent, P est un élément double de la projectivité (Q) $\overline{\wedge}$ (VV') ; il en est de même de R. Ainsi

Les éléments doubles de la projectivité (Q) $\overline{\wedge}$ (VV') *forment un terne* P Q R *de la projectivité cyclique* (EE, FF).

Les éléments doubles P'' Q'' R'' de la projectivité (R) $\overline{\wedge}$ (VV') jouissent de la même propriété (*).

72. Soient p, q, r, p'', q'', r'' les tangentes à la courbe C_3^4 déduites des deux ternes particuliers P Q R, P'' Q'' R'' (71). On a vu (71) R ≡ T, et le point rp est le point de contact C_p de la tangente p (14). De même $pq \equiv C_q$, $qr \equiv C_r$, $q''p'' \equiv C_{p''}$, $r''q'' \equiv C_{q''}$, $p''r'' \equiv C_{r''}$ sont les points de contact des tangentes q, r, p'', q'', r''. Par suite,

Sur la courbe C_3^4 *il existe deux triangles circonscrits* pqr, p''q''r'' *inscrits dans la même courbe* (**). Ils jouissent seuls de cette propriété.

De la propriété (6) on conclut: *Les côtés des triangles* pqr, p''q''r'' *déterminent sur la tangente double* EF *deux ternes de la projectivité cyclique* (EE, FF) (**).

73. Les deux triangles pqr, $p''q''r''$ se correspondent dans les homologies (42); donc les coniques $(C_pC_qC_r\,EF)$, $(C_{p''}C_{q''}C_{r''}EF)$ jouissent de la même propriété et sont identiques. Les axes d'homologie passent par le pôle de EF relativement à la conique $(C_pC_qC_r\,C_{p''}C_{q''}C_{r''})$; donc *les deux triangles* pqr, p''q''r'' *sont inscrits dans une conique ayant un double contact en* E, F *avec la conique* Φ.

(*) Les éléments doubles de la projectivité (P) $\overline{\wedge}$ (VV') conduisent aux tangentes de rebroussement.

(**) Gob, *loc. cit.*, 1906, p. 14.

NOTE

SUR

LES COURBES TROCHOÏDALES

PAR

C. DE JANS

NOTE

SUR

LES COURBES TROCHOÏDALES

---

1. Nous considérerons dans cette note les courbes décrites par un point du plan d'un cercle qui roule sur un cercle fixe, connues sous la dénomination générale de *trochoïdales* ou de *trochoïdes*. Lorsque l'un au moins des deux cercles est imaginaire on obtient, sous certaines conditions, des courbes réelles, appelées *pseudo-trochoïdes*. On sait que les trochoïdales peuvent également s'engendrer au moyen d'un parallélogramme articulé; il en est de même des pseudo-trochoïdes, mais, dans ce cas, le parallélogramme est imaginaire.

Notre but est d'exposer un mode de génération cinématique des trochoïdes, que nous croyons nouveau, et qui, étendu aux pseudo-trochoïdes, fournit une description cinématique simple et entièrement réelle de ces lignes, dont on ne possédait jusqu'ici, à notre connaissance, en dehors des deux générations cinématiques à éléments imaginaires, que nous venons de mentionner, qu'une description réelle assez peu intuitive, due à Roth, et fondée sur l'emploi de deux spirales logarithmiques.

2. Nous dirons qu'un point se meut, sur une ellipse ou sur une hyperbole, suivant la loi harmonique, lorsque la vitesse

aréolaire de son rayon vecteur, issu du centre, est constante.

Considérons un point P, décrivant suivant cette loi une ellipse dont le centre O est fixe, et qui elle-même est animée dans son propre plan d'un mouvement uniforme de rotation autour de ce centre. Rattachons à l'ellipse un système d'axes coordonnés rectangulaires OX′, OY′, tels que l'équation de la courbe, rapportée à ces axes, soit

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

Soit φ l'angle excentrique du point décrivant P; nous pouvons poser

$$x' = a\cos\varphi, \qquad y' = b\sin\varphi. \tag{2}$$

Puisque le point P obéit à la loi harmonique, l'angle φ croît proportionnellement au temps t; nous avons donc

$$\varphi = pt + \alpha, \tag{3}$$

p et α étant des constantes. Ainsi

$$x' = a\cos(pt + \alpha), \qquad y' = b\sin(pt + \alpha). \tag{4}$$

Choisissons maintenant, dans le plan Π de l'ellipse, un système d'axes rectangulaires fixes, OX, OY. L'angle que l'axe OX′ fait avec l'axe fixe OX, étant proportionnel à t, est égal à $\lambda t + \beta$, λ désignant la vitesse angulaire de l'ellipse, et β une constante. Or, nous avons

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos(\lambda t + \beta) - y'\sin(\lambda t + \beta), \\ y &= x'\sin(\lambda t + \beta) + y'\cos(\lambda t + \beta). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

En remplaçant dans ces équations x' et y' par leurs valeurs (4),

nous obtenons les équations paramétriques suivantes de la trajectoire du point P :

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos(\lambda t+\beta)\cos(pt+\alpha) - b\sin(\lambda t+\beta)\sin(pt+\alpha),\\ y &= a\sin(\lambda t+\beta)\cos(pt+\alpha) + b\cos(\lambda t+\beta)\sin(pt+\alpha); \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

t est le paramètre variable.

En posant

$$\left.\begin{aligned} \lambda + p &= \mu, \qquad \lambda - p = \nu,\\ \beta + \alpha &= \gamma, \qquad \beta - \alpha = \delta, \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

ces équations peuvent s'écrire

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a+b}{2}\cos(\mu t+\gamma) + \frac{a-b}{2}\cos(\nu t+\delta),\\ y &= \frac{a+b}{2}\sin(\mu t+\gamma) + \frac{a-b}{2}\sin(\nu t+\delta). \end{aligned}\right\}$$

Posant encore

$$\mu t+\gamma = \omega, \qquad \nu t+\delta = \omega+\psi, \quad (8)$$

elles deviennent

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a+b}{2}\cos\omega + \frac{a-b}{2}\cos(\omega+\psi),\\ y &= \frac{a+b}{2}\sin\omega + \frac{a-b}{2}\sin(\omega+\psi). \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Mais, en éliminant t entre les équations (8), il vient

$$\psi = \frac{(\nu-\mu)\omega + \mu\delta - \nu\gamma}{\mu};$$

en tenant compte des formules (7), et adoptant la notation

$$\xi = \frac{\lambda}{\mu}, \tag{10}$$

cette équation donne

$$\omega + \psi = \frac{\xi - 1}{\xi + 1}\omega + \frac{2(\beta - \xi\alpha)}{\xi + 1}. \tag{11}$$

Écrivons

$$R = -\frac{a+b}{\xi - 1}, \quad r = \frac{\xi + 1}{\xi - 1}\cdot\frac{a+b}{2}, \quad h = \frac{a-b}{2}, \tag{12}$$

c'est-à-dire

$$\frac{a+b}{2} = R + r, \quad \frac{a-b}{2} = h, \quad \xi = -\frac{R + 2r}{R}.$$

Les équations (9) deviennent, en tenant compte de (11),

$$\left.\begin{aligned} x &= (R + r)\cos\omega + h\cos\left(\frac{R + r}{r}\omega - \frac{R + 2r}{r}\alpha - \frac{R}{r}\beta\right), \\ y &= (R + r)\sin\omega + h\sin\left(\frac{R + r}{r}\omega - \frac{R + 2r}{r}\alpha - \frac{R}{r}\beta\right). \end{aligned}\right\}$$

Posant enfin

$$(R + 2r)\alpha + R\beta = r\varepsilon,$$

ces équations prennent la forme

$$\left.\begin{aligned} x &= (R + r)\cos\omega + h\cos\left(\frac{R + r}{r}\omega - \varepsilon\right), \\ y &= (R + r)\sin\omega + h\sin\left(\frac{R + r}{r}\omega - \varepsilon\right). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Ce sont là les équations paramétriques générales des tro-

choïdes dont le pôle se trouve à l'origine des coordonnées;
ω est le paramètre variable,
R, le rayon du cercle fixe,
r, le rayon du cercle mobile qui roule sur le premier,
h, la distance du point décrivant au centre du cercle mobile,
ε, une constante arbitraire.

Par conséquent, si un point décrit une ellipse d'un mouvement harmonique et si en même temps l'ellipse tourne uniformément dans son plan, autour de son centre, la trajectoire du point décrivant est une trochoïde dont le pôle coïncide avec le centre de l'ellipse.

3. Il est bien connu que, dans les équations (13), on peut, sans nuire à la généralité, considérer $R + r$ et h comme positifs; et qu'alors, si $r > 0$, la courbe (13) est une épitrochoïde, et si $r < 0$, une hypotrochoïde. Dans le cas des épitrochoïdes, les cercles fixe et mobile se touchent extérieurement si $R > 0$, intérieurement si $R < 0$.

4. En choisissant l'origine du temps au moment où le point décrivant passe à l'extrémité $x' = a$, $y' = 0$, du grand axe de l'ellipse, on annule α (équations 4). En prenant pour axe des x positifs l'axe du plan fixe II qui coïncide avec OX′ à l'origine du temps, on a également $\beta = 0$ et, par suite, $\varepsilon = 0$. De cette manière, les équations (13) prennent la forme ordinaire des trochoïdes rapportées à deux axes rectangulaires passant par le pôle, l'axe des x positifs contenant un sommet de la courbe situé le plus loin possible de l'origine (apocentre).

Ainsi, nous avons établi une description des trochoïdes, qui peut s'appeler leur génération elliptique, par opposition à la génération circulaire, qui utilise le mouvement de roulement, et à la génération articulée, qui emploie un parallélogramme.

La forme et les dimensions de la courbe sont fixées par les constantes a, b, ξ.

On passe de cette génération elliptique à la description circulaire au moyen des formules (12), et inversement de cette dernière description à la génération elliptique par les formules

$$a = \mathrm{R} + r + h, \qquad b = \mathrm{R} + r - h, \qquad \xi = -\frac{\mathrm{R} + 2r}{\mathrm{R}}. \quad (14)$$

5. *Remarque.* — Les équations (12) deviennent illusoires dans le cas de $\xi = 1$. Mais on sait qu'une même trochoïde, définie par les éléments R, r, h, admet une deuxième génération circulaire, dont les éléments R', r', h' sont liés à R, r, h par des formules établies par Euler. Ces éléments R', r', h' se rattachent à la génération elliptique par les formules

$$\mathrm{R}' = \frac{a-b}{\xi+1}, \quad r' = \frac{\xi-1}{\xi+1} \cdot \frac{a-b}{2}, \quad h' = \frac{a+b}{2}; \quad (15)$$

l'un des systèmes (12) ou (15) pourra s'employer quand l'autre deviendra illusoire. On passe de (12) à (15) en changeant les signes de b et de ξ.

6. Rattachons encore entre elles la description elliptique des trochoïdes et la génération articulée.

Dans cette dernière, un parallélogramme a un sommet fixe O; les côtés de ce parallélogramme ont des longueurs constantes h, h' et tournent uniformément autour de O avec des vitesses angulaires μ, ν, dont le rapport est $\chi = \frac{\mu}{\nu}$. L'extrémité mobile de la diagonale du parallélogramme, passant par O, décrit la trochoïde, dont la forme et la grandeur sont déterminées par les constantes h, h', χ. On trouve facilement des relations

$$h = \frac{a-b}{2}, \quad h' = \frac{a+b}{2}, \quad \chi = \frac{\xi+1}{\xi-1},$$

ou

$$a = h' + h, \qquad b = h' - h, \qquad \xi = \frac{\chi+1}{\chi-1},$$

qui permettent le passage d'un mode de génération à l'autre.

Il est inutile de rappeler ici les formules bien connues pour passer de la génération circulaire à la description par un parallélogramme articulé, et inversement.

7. *Discussion de la génération elliptique.* — Supposons l'ellipse donnée, et faisons varier les vitesses p et λ. Nous admettons qu'on ait défini, dans les plans superposés des axes fixes OX, OY et des axes mobiles OX′, OY′, un sens positif de rotation, le même pour ces deux plans. Nous convenons alors de considérer p comme un nombre positif, si le rayon vecteur de l'ellipse tourne dans le sens positif, dans le plan des axes OX′, OY′; nous le considérons comme négatif dans le cas contraire. De même, nous considérons λ comme positif, si l'ellipse tourne dans le sens positif dans le plan des axes fixes. Si λ et p sont de même signe, nous disons que les mouvements du point P et de l'ellipse sont concordants; nous les appelons discordants dans le cas contraire. Enfin, nous supposons $R + r \geqq 0$.

1° Si $-\infty < \xi < -1$, les formules (12) donnent $R > 0$, $r > 0$. Donc, si les mouvements ci-dessus sont discordants et que la rotation de l'ellipse soit plus rapide (en valeur absolue) que la révolution relative du rayon vecteur du point P qui la parcourt, ce point décrit une épitrochoïde;

2° Si $-1 < \xi < 0$, on trouve $R > 0$, $r < 0$, $R + 2r > 0$. Donc, si les mouvements sont discordants et que la rotation de l'ellipse soit moins rapide que la révolution relative du rayon vecteur, la courbe engendrée est une hypotrochoïde, et le diamètre $2|r|$ du cercle mobile, défini par les formules (12), est plus petit que le rayon du cercle fixe ($2|r'|$ est alors plus grand que ce rayon);

3° Si $0 < \xi < 1$, on a $R > 0$, $r < 0$, $R + 2r < 0$. Donc, si les mouvements sont concordants et que la rotation de l'ellipse soit moins rapide que la révolution relative du rayon vecteur, la courbe engendrée est une hypotrochoïde, et le diamètre du

cercle mobile, défini par les formules (12), est plus grand que le rayon du cercle fixe;

4° Si $1 < \xi < \infty$, on obtient $R < 0$, $r > 0$, et même $r > |R|$. Si donc les mouvements sont concordants et que la rotation de l'ellipse soit plus rapide que la révolution relative du rayon vecteur, la courbe engendrée est une épitrochoïde, et le rayon du cercle mobile, défini par les formules (12), est plus grand que celui du cercle fixe.

Il resterait à examiner les cas $\xi = \pm\infty$, $\xi = \pm 1$, $\xi = 0$, dans lesquels la trochoïde dégénère; mais cet examen est inutile pour notre objet.

Il importe surtout de retenir de la discussion précédente que la courbe est une épitrochoïde, si $|\xi| > 1$, une hypotrochoïde si $|\xi| < 1$.

8. La trochoïde sera algébrique si ξ est commensurable, car alors le rapport $R : r$ (formules 12) est rationnel. La courbe devient une épicycloïde ordinaire si $\xi = -\frac{a}{b}$, et une hypocycloïde ordinaire si $\xi = -\frac{b}{a}$. C'est ce que montrent immédiatement les formules (12), qui donnent, dans le premier cas, $r = h$ et, dans le second, $r = -h$. Mais on le voit aussi géométriquement en examinant la vitesse du point décrivant, et en cherchant les conditions dans lesquelles ce point devient stationnaire; on a alors affaire à une courbe à points de rebroussement, et cette courbe est une épicycloïde si ces points se présentent à l'extrémité du petit axe de l'ellipse mobile, une hypocycloïde s'ils se présentent à l'extrémité du grand axe.

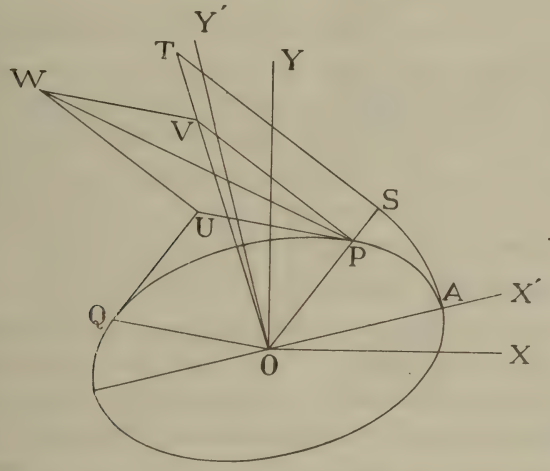
Deux trochoïdes définies par la génération elliptique sont semblables, si $\frac{a}{b}$ et ξ ont les mêmes valeurs pour ces deux courbes.

Enfin, la trochoïde devient une rhodonée (rosace) si $b = 0$; on retombe sur la description bien connue de ces lignes, par un point doué d'un mouvement harmonique sur un segment de

droite qui tourne d'un mouvement uniforme autour de son milieu et dans un plan.

9. On sait que, dans la description circulaire, toute trochoïde est susceptible d'une double génération. Au contraire, une trochoïde donnée n'admet qu'une seule génération elliptique.

10. La construction de la tangente à la trochoïde résulte aisément du principe de la composition des mouvements. Soient OQ un demi-diamètre conjugué à OP, QOPU le parallélogramme construit sur OP et OQ, PU le sens du mouvement



de P sur l'ellipse. La vitesse relative de P par rapport à l'ellipse sera $p \times \overline{OQ} = p \times \overline{PU}$; représentons-la par le segment U.

La vitesse du mouvement d'entraînement de P vaut et sera représentée, à la même échelle, par un segment dirigé PV, de longueur $\xi \times \overline{OP}$, perpendiculaire sur O et dont le sens est fixé par le signe de ξ, c'est-à-dire par le sens de la révolution de l'ellipse. La résultante PW de ces deux segments dirigés donne la tangente à la trochoïde.

On peut remarquer que l'on obtient PV en prolongeant OP jusqu'à son intersection S avec le cercle principal de l'ellipse,

construisant le segment ST tangent en S à ce cercle, et de longueur ξa, et joignant OT, qui coupe en V la perpendiculaire PV sur le rayon vecteur.

On pourrait encore, assez facilement, construire les deux systèmes de cercles qui définissent la trochoïde dans les deux modes de génération circulaire.

11. *Remarque sur les développantes de cercle et sur la spirale d'Archimède.* — L'hypothèse $a=\infty$, $p=0$, sous la condition que le produit ap ait une valeur finie (ou $\frac{a}{\xi}$ une valeur finie), conduit, par la dernière formule (12), à $h=\infty$; en outre, $\frac{R}{r}=-\frac{2}{\xi+1}$. Mais $p=0$ donne $|\xi|=\infty$ et, par suite, $|r|=\infty$, tandis que R reste fini. Comme $R+r\geqq 0$, nous prendrons $r=\infty$; d'où $\xi=-\infty$. Il résulte alors de la deuxième formule (14) que $r-h=b-R$ est fini. La trochoïdale devient une développante de cercle généralisée, courbe engendrée par un point du plan, lié invariablement à une droite qui roule sur un cercle fixe de rayon R; la distance du point à la droite est $b-R=\delta$, et l'on a (première formule 12) $\frac{a}{\xi}=R$.

On voit donc qu'une telle développante peut être engendrée par un point qui parcourt une droite avec une vitesse constante (dont la valeur absolue est $|v|=pa$), tandis que la droite tourne uniformément (avec la vitesse angulaire λ) autour de l'origine des coordonnées, les rotations du rayon vecteur du point et de la droite étant discordantes.

C'est d'ailleurs ce qu'un calcul direct montre immédiatement. Soient, en effet,

$$x'=b, \qquad y'=-vt=-pat;$$

les formules (4) donnent, en choisissant les axes de manière à annuler β, et en posant $\lambda t=\omega$,

$$x=b\cos\omega+\frac{v}{\lambda}\omega\sin\omega, \qquad y=b\sin\omega-\frac{v}{\lambda}\omega\cos\omega,$$

ou

$$x=b\cos\omega+\frac{a}{\xi}\omega\sin\omega, \qquad y=b\sin\omega-\frac{a}{\xi}\omega\cos\omega.$$

Le rayon du cercle fixe est $R = b - \delta$; en écrivant encore $\frac{a}{\xi} = R$, on a

$$x = (R + \delta)\cos\omega + R\omega\sin\omega, \quad y = (R + \delta)\sin\omega - R\omega\cos\omega ;$$

ce sont les équations des développantes générales.

On a alors

$$x' = R + \delta, \qquad y' = -\lambda R t, \qquad v = \lambda R.$$

A la valeur $b = 0$, c'est-à-dire $\delta = -R$, correspond la spirale d'Archimède. La génération elliptique conduit donc à la définition ordinaire de cette courbe, tandis que la génération circulaire donne la spirale comme roulette.

12. *Les pseudo-trochoïdes.* — Reprenons maintenant les raisonnements précédents, en substituant à l'ellipse (1) une hyperbole

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Au lieu des équations (2), nous pouvons poser

$$x' = a\,\mathrm{ch}\,\varphi, \qquad y' = b\,\mathrm{sh}\,\varphi,$$

et, si le point P se meut sur l'hyperbole suivant la loi harmonique, l'équation (3) subsiste. Les équations (5) conduisent au système

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos(\lambda t + \beta)\,\mathrm{ch}\,(pt + \alpha) - b\sin(\lambda t + \beta)\,\mathrm{sh}\,(pt + \alpha), \\ y &= a\sin(\lambda t + \beta)\,\mathrm{ch}\,(pt + \alpha) + b\cos(\lambda t + \beta)\,\mathrm{sh}\,(pt + \alpha). \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

En conservant la notation (10), posons

$$\omega = pt + \frac{\beta}{\xi}, \qquad \varepsilon = \alpha - \frac{\beta}{\xi};$$

les équations du lieu de P deviennent

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\xi\omega\,\mathrm{ch}\,(\omega + \varepsilon) - b\sin\xi\omega\,\mathrm{sh}\,(\omega + \varepsilon), \\ y &= a\sin\xi\omega\,\mathrm{ch}\,(\omega + \varepsilon) + b\cos\xi\omega\,\mathrm{sh}\,(\omega + \varepsilon). \end{aligned}\right\}$$

Ce sont là précisément les équations paramétriques générales des pseudo-trochoïdes, dont le pôle est à l'origine des coordonnées, ω étant le paramètre variable. Nous sommes donc amené à la conclusion suivante : une pseudo-trochoïde peut s'engendrer par le mouvement d'un point qui parcourt une hyperbole conformément à la loi harmonique, pendant que cette courbe tourne uniformément autour de son centre.

13. Il est aisé d'établir les formules qui relient cette génération hyperbolique des pseudo-trochoïdes à la génération circulaire définie par les éléments R, r, h, ou à la description par un parallélogramme articulé, définie par les éléments h, h', χ. Il suffit de remarquer que les formules (6) se transforment dans les formules (16) en remplaçant b par $\frac{b}{i}$, p par ip, α par $i\alpha$, avec $i = \sqrt{-1}$. On obtient alors sur-le-champ, par les formules (12), dans lesquelles ξ sera remplacé par $-i\xi$,

$$\mathrm{R} = \frac{a - \xi b}{1 + \xi^2} - i\frac{b + \xi a}{1 + \xi^2}, \quad r = \frac{2\xi b - (1 - \xi^2)a}{2(1 + \xi^2)} + i\frac{2\xi a + (1 - \xi^2)b}{2(1 + \xi^2)}, \quad h = \frac{a + ib}{2}, \tag{17}$$

formules dans lesquelles ξ désigne le rapport réel $\frac{\lambda}{p}$. Les équations (15) conduisent pour R', r', h' aux valeurs complexes conjuguées de R, r, h. Les formules (14) sont remplacées par

$$a = \mathrm{R} + r + h, \quad b = -\frac{\mathrm{R} + r - h}{i}, \quad \xi = \frac{\mathrm{R} + 2r}{i\mathrm{R}}.$$

Ces formules satisfont bien aux conditions que l'on sait être nécessaires pour qu'une pseudo-trochoïde réelle soit engendrée par le roulement de cercles complexes, à savoir que $\mathrm{R} + r$ et h aient des valeurs conjuguées et que $|\mathrm{R} + r| = |r| = |h|$.

14. Quand $h = -r$, la courbe est appelée *paracycloïde;* les équations (17) montrent que la condition équivaut à

$$\xi = -\frac{b}{a}.$$

On a alors

$$R = a, \qquad r = -h = -\frac{a+ib}{2}.$$

Quand $h = r$, la courbe se nomme *hypercycloïde;* la condition en est

$$\xi = \frac{a}{b},$$

et l'on a

$$R = -ib, \qquad r = h = \frac{a+ib}{2}.$$

15. La construction de la tangente aux pseudo-trochoïdes est analogue à celle exposée dans le n° 10.

16. Pour relier entre elles la génération hyperbolique des pseudo-trochoïdes et la génération par le parallélogramme articulé, nous avons les formules

$$h = \frac{a+ib}{2}, \quad h' = \frac{a-ib}{2}, \quad \chi = \frac{i\xi+1}{i\xi-1}$$

et les formules réciproques

$$a = h + h', \qquad b = \frac{h-h'}{i}, \qquad \xi = \frac{1}{i}\cdot\frac{\chi+1}{\chi-1}.$$

NOTES

DE

GÉOMÉTRIE ET DE TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUES

PAR

A. GOB

PROFESSEUR A L'ATHÉNÉE ROYAL DE LIÉGE

NOTES

DE

GÉOMÉTRIE ET DE TRIGONOMÉTRIE

SPHÉRIQUES

La présente note contient quelques théorèmes que nous croyons nouveaux. Elle renferme aussi diverses remarques de géométrie sphérique dont plusieurs, très simples d'ailleurs, sont bien connues; nous les rappelons ici, parce qu'elles nous servent dans plusieurs questions et qu'il nous a paru utile d'attirer l'attention sur les simplifications qu'elles peuvent apporter dans les démonstrations.

Dans une note présentée à l'Académie royale de Belgique (*), M. G. Cesàro a exposé une méthode très simple et très féconde dans laquelle les formules de la trigonométrie sphérique se déduisent de deux triangles rectilignes *(triangle des éléments, triangle dérivé)*; nous établissons d'une manière nouvelle l'existence de ces triangles; enfin, dans la dernière partie de cette note, nous étendons la méthode de M. Cesàro au quadrilatère sphérique.

(*) *Bull. de l'Acad. royale de Belgique* (Classe des sciences), 1905, nos 9-10, p. 434.

I. — Remarques géométriques.

1. Soient O le pôle du petit cercle circonscrit à un triangle sphérique ABC (*), 2E l'excès sphérique de ce triangle; l'angle OBC est égal à $\frac{\pi}{2}$ — (A-E), cet angle étant positif ou négatif suivant que O est ou n'est pas du même côté que A par rapport à BC; en d'autres termes, *le cercle* ABC *fait avec le côté* BC *un angle égal à* A-E.

Soit A′ le point diamétralement opposé à A : l'aire du fuseau ABA′C ayant la même mesure que 2A, l'excès sphérique du triangle A′BC (*triangle complémentaire* de ABC) sera 2A-2E, et, par conséquent, le petit cercle A′BC fait avec les côtés BC, AC, AB des angles égaux à E, C-E, B-E.

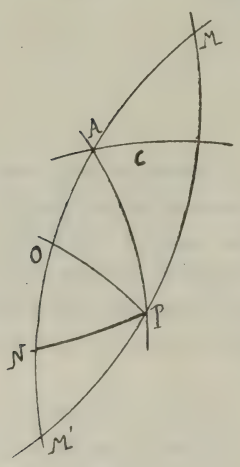


Fig. 1.

2. Soient O un point fixe de la sphère et A un point mobile sur un grand cercle *c* (fig. 1); on porte sur l'arc de grand cercle OA un arc AM égal à OA; *le lieu de* M *est un petit cercle parallèle à* c *et passant par le point* O′ *diamétralement opposé à* O.

En effet, soient P le pôle de *c*, M′ le point diamétralement opposé à M et N le milieu de OM′; les arcs AP et AN sont des quadrants, donc A est le pôle de NP et l'angle ONP est droit; par suite, PM′ = PO et PM = π — PO, ce qui démontre le théorème.

Inversement, si M décrit un petit cercle et si O est le point diamétralement opposé à un point O′ de ce cercle, le milieu A de l'arc OM décrit le grand cercle parallèle au petit cercle donné.

(*) Le lecteur est prié de tracer la figure.

3. M. Cesàro a appliqué la méthode des projections stéréographiques à diverses recherches sur la sphère; en particulier, il a retrouvé par cette méthode le *triangle des éléments* et le *triangle dérivé* (*). Sa démonstration ne diffère que par quelques détails de celle que nous donnons dans ce paragraphe; nous la reproduisons, non seulement à cause de sa simplicité, mais surtout afin d'en déduire une remarque déjà faite par M. Cesàro et dont il a tiré de nombreuses conséquences (§ 4); cette remarque nous sera utile dans la suite.

Rappelons d'abord les propositions sur lesquelles nous nous appuyons; ces propositions ne dépassent pas le cadre de l'enseignement moyen et devraient, croyons-nous, être enseignées dans les cours élémentaires de géométrie à trois dimensions.

a) *La figure inverse d'un plan est une sphère passant par le centre d'inversion.*

b) *La figure inverse d'une sphère est un plan ou une sphère suivant que cette sphère passe ou ne passe pas par le centre d'inversion.*

c) *La figure inverse d'un cercle est une droite ou un cercle suivant que ce cercle passe ou ne passe pas par le centre d'inversion.*

d) *L'angle de deux lignes est égal à l'angle de leurs inverses.*

e) *Si* A *et* A′, B *et* B′ *sont deux couples de points inverses,* O *le centre d'inversion et* k *la puissance d'inversion, on a*

$$A'B' = \frac{k \cdot AB}{OA \cdot OB}.$$

L'existence du triangle des éléments est une conséquence immédiate de ces propositions.

(*) G. Cesàro, Les formules de la trigonométrie sphérique déduites de la projection stéréographique du triangle. Emploi de cette projection dans les recherches sur la sphère. (*Bull. de l'Acad. royale de Belgique* [Classe des sciences], 1905, n° 12, pp. 560-583.)

Soient ABC un triangle sphérique, B′ et C′ les projections stéréographiques de B et C par rapport au centre d'inversion A_1, diamétralement opposé à A (fig. 2). On a (*e*), le rayon de la sphère étant 1, et, par suite, la puissance d'inversion étant égale à 2,

$$B'C' = \frac{A_1B \cdot A_1C}{2BC} = \frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}},$$

puis

$$OB' = \operatorname{tg} OA_1B = \operatorname{tg}\frac{c}{2}, \quad OC' = \operatorname{tg}\frac{b}{2}.$$

Si l'on multiplie les côtés du triangle OB′C′ par $\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}$, on obtient

$$B'C' = \sin\frac{a}{2}, \quad OB' = \sin\frac{c}{2}\cos\frac{b}{2}, \quad OC' = \sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2};$$

ce sont les côtés du triangle des éléments.

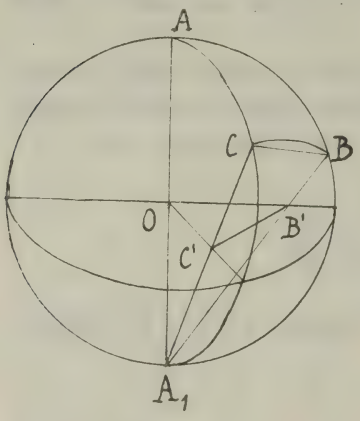


Fig. 2.

Pour calculer les angles du triangle OB′C′, remarquons que les côtés OB′, OC′, B′C′ sont les inverses des grands cercles ABA_1, ACA_1 et du petit cercle A_1BC; les angles du triangle OB′C′ sont donc égaux aux angles que forment entre eux ces trois cercles; par suite (1),

$$O = A, \qquad B' = B - E,$$
$$C' = C - E.$$

Ainsi, *le triangle des éléments est semblable au triangle ayant pour sommets les projections stéréographiques des sommets* A, B, C *sur un plan perpendiculaire au rayon* OA.

Le triangle dérivé est semblable au triangle ayant pour sommets les projections, sur le même plan, des points A, B_1, C ou A, B, C_1, B_1 et C_1 étant les points diamétralement opposés à B et C.

4. Le côté BC a pour projection stéréographique un cercle (*c*) passant par B′ et C′; ce cercle fait avec B′C′ un angle égal à celui de l'arc BC avec le cercle $A_1BC(3, d)$, c'est-à-dire à E(1); par suite, l'arc B′C′ du cercle (*c*) a pour mesure 2E. Ainsi, *dans la projection stéréographique faite sur un plan normal au rayon passant par l'un des sommets du triangle, l'excès sphérique est représenté par la projection du côté qui se projette suivant un cercle* (*).

5. Voici une autre façon d'arriver au triangle des éléments : En A, B, C (fig. 3) menons les tangentes aux côtés du triangle sphérique; soient A′, B′, C′ les points d'intersection de ces tangentes deux à deux et T le point d'intersection des plans tangents en A, B, C. Les angles TAO, TBO, TCO étant droits, la sphère décrite sur TO comme diamètre passe par A, B, C; les distances du centre O′ de cette sphère aux plans AB′C′, BA′C′, CA′B′ sont égales entre elles, car ces distances sont les moitiés des rayons OA, OB, OC de la sphère O; par

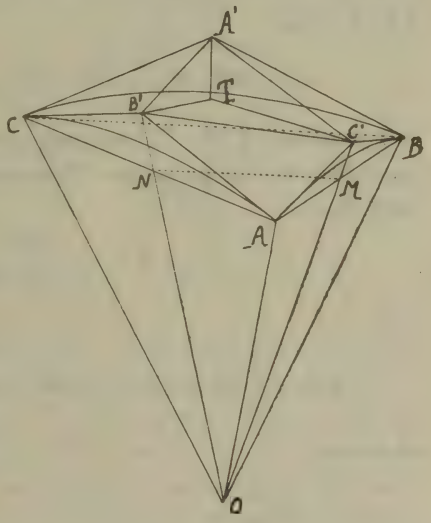


Fig. 3.

(*) G. Cesàro, *loc. cit.*

suite, les cercles AB′C′, BA′C′, CA′B′, sections d'une même sphère par des plans équidistants du centre, sont égaux entre eux. Or, on a A′B = A′C; par conséquent, les angles BC′A′, CB′A′ sont égaux. Posons

$$BC'A' = CB'A' = x, \quad AC'B' = CA'B' = y, \quad AB'C' = BA'C' = z;$$

nous aurons

$$x + y = \pi - C, \quad x + z = \pi - B, \quad y + z = \pi - A;$$

d'où

$$x + y + z = \pi - E, \quad x = A - E, \quad y = B - E, \quad z = C - E.$$

Les triangles AB′C′, BA′C′, CA′B′ sont donc semblables aux triangles des éléments du triangle ABC. Pour calculer leurs côtés, remarquons que si M et N sont les milieux des droites AB, AC, on a

$$OM \cdot OC' = \overline{OA}^2, \quad ON \cdot OB' = \overline{OA}^2.$$

Les points A, B′, C′ sont donc les inverses de A, N, M par rapport à O, la puissance d'inversion étant $\overline{OA}^2$ ou 1; par suite (3, *e*),

$$B'C' = \frac{MN}{OM \cdot ON}.$$

Or,

$$MN = \frac{1}{2} BC = \sin \frac{a}{2}, \quad OM = \cos \frac{c}{2}, \quad ON = \cos \frac{b}{2};$$

on a donc

$$B'C' = \frac{\sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}, \quad AB' = OA \operatorname{tg} AOB' = \operatorname{tg} \frac{b}{2}, \quad AC' = \operatorname{tg} \frac{c}{2}.$$

Il suffit de multiplier ces côtés par $\cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}$ pour obtenir les côtés du triangle des éléments sous leur forme ordinaire.

6. Les relations qui concernent la surface d'un triangle sphérique, l'arc qui joint les milieux des deux côtés et son inclinaison sur le troisième côté, le rayon du cercle de Lexell se démontrent immédiatement si l'on observe que tous ces éléments figurent dans un même triangle rectangle; ce triangle permet d'obtenir d'autres relations remarquables.

Soient O et O′ (fig. 4) les pôles des cercles circonscrits au triangle ABC et à son complémentaire A′BC. Nous avons vu (1) que l'angle O′BC est égal à $\frac{\pi}{2} - E$; par suite, lorsque BC est fixe et E constant, le point O′ est fixe; A′ décrit donc un petit cercle ayant pour pôle O′; A décrit alors le petit cercle symétrique par rapport au centre de la sphère *(cercle de Lexell)*; O′B est donc égal au rayon sphérique ρ du cercle de Lexell.

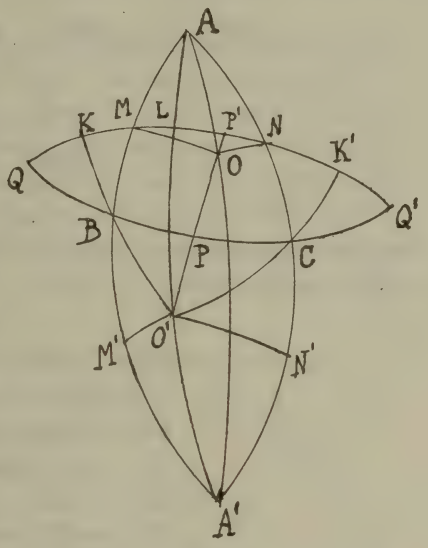


Fig. 4.

Soient M, N, P, M′, N′ les milieux des arcs AB, AC, BC, A′B, A′C; les arcs MM′, NN′ sont des quadrants et O′M′ est perpendiculaire à MM′; par suite, M est le pôle de O′M′ et de même N est le pôle de O′N′; donc O′ est le pôle de MN et de même O est le pôle de M′N′. Si K, K′, L sont les points de rencontre de MN avec O′B, O′C, O′A, les couples de triangles rectangles BKM et ALM, CK′N et ALN sont symétriques et l'on a MK = ML et NK′ = NL; par suite, KK′ = 2MN et l'angle BO′P a la même mesure que l'arc MN.

Si l'on remarque enfin que l'angle Q des arcs MN et BC a même mesure que PP′, c'est-à-dire que $\frac{\pi}{2} - O'P$, on voit que le

triangle rectangle PBO′, dont les éléments sont indiqués sur la figure 5, permet d'obtenir toutes les relations existant entre a, E, MN, ρ et Q. On obtient ainsi

$$\operatorname{tg}\rho = \frac{\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{\sin E}\ (1),\quad \cos E = \frac{\cos MN}{\cos\frac{a}{2}}\ (2),\quad \sin E = \sin MN.\sin Q,\ (3)$$

$$\cos\rho = \operatorname{cotg} MN \operatorname{tg} E = \cos\frac{a}{2}\sin Q, \qquad (4)$$

$$\sin\rho = \frac{\sin\frac{a}{2}}{\sin MN} = \frac{\cos Q}{\cos E}. \qquad (5)$$

Lorsque BC est fixe et E constant, l'arc QMNQ reste fixe. On peut encore déduire de là, par application du § 2, que A décrit un petit cercle.

7. La figure précédente fournit la démonstration géométrique d'un théorème important qui nous sera utile dans la suite : *si d'un point* O (fig. 4) *on abaisse sur deux grands cercles* ABA′, ACA′ *deux arcs perpendiculaires* OM *et* ON, *l'arc de grand cercle mené par* A *perpendiculairement à* MN *est l'isogonal de* AO *par rapport à l'angle* BAC.

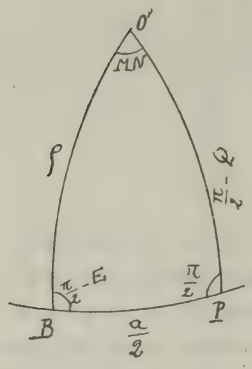


FIG. 5.

Portons, sur AB et AC, MB = AM et NC = AN et soit O′ le pôle du cercle A′BC; ce point est aussi le pôle de MN et, par conséquent, l'arc de grand cercle mené par A perpendiculairement à MN est l'arc AOA′. Or, on a (1)

$$\text{angle } MAO' = O'A'B = O'BA' = \pi - B - \left(\frac{\pi}{2} - E\right) = \frac{\pi}{2} - (B - E).$$

L'angle OAC étant aussi égal à $\frac{\pi}{2}$ — (B-E), les arcs AO, AO′ sont isogonaux par rapport à l'angle A.

La démonstration trigonométrique de ce théorème est immédiate. En effet, les triangles rectangles AML, ANL donnent

$$\sin \mathrm{MAL} = \frac{\cos \mathrm{AML}}{\cos \mathrm{AL}} = \frac{\sin \mathrm{OMN}}{\cos \mathrm{AL}}, \qquad \sin \mathrm{NAL} = \frac{\sin \mathrm{ONM}}{\cos \mathrm{AL}};$$

d'où

$$\frac{\sin \mathrm{MAL}}{\sin \mathrm{NAL}} = \frac{\sin \mathrm{OMN}}{\sin \mathrm{ONM}} = \frac{\sin \mathrm{ON}}{\sin \mathrm{OM}} = \frac{\sin \mathrm{OAN}}{\sin \mathrm{OAM}}.$$

8. On sait que les hauteurs d'un triangle sont les bissectrices des angles de son triangle orthique. La démonstration géométrique de ce théorème courant se fait d'ordinaire en passant par la trièdre; la démonstration suivante, basée sur le théorème précédent, est simple et ne nécessite que des constructions effectuées sur la sphère.

Soient AA′, BB′, CC′ les hauteurs du triangle ABC, AD et AE des arcs de grand cercle perpendiculaires à A′B′ et A′C′ (fig. 6) (*). L'arc A′C′ joint les pieds des arcs menés par C perpendiculairement à AA′ et à AB; donc AD est l'isogonal de AC par rapport à l'angle BAA′; les angles EAA′, BAC sont donc égaux; de même DAA′ = BAC; par suite, les triangles rectangles AA′D, AA′E sont symétriques et les angles DA′A, EA′A égaux.

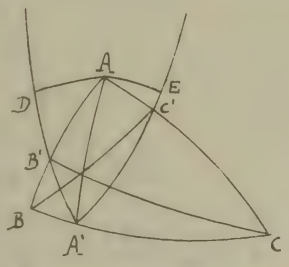


Fig. 6.

Comme il est aisé de démontrer géométriquement que les arcs bissecteurs des angles d'un triangle sont concourants, le théorème précédent permet de démontrer par la géométrie que les hauteurs d'un triangle sphérique sont concourantes.

9. Pour démontrer les relations existant entre les rayons sphériques des cercles inscrits ou ex-inscrits à un triangle, les arcs qui joignent les sommets aux pôles de ces cercles, les angles que forment entre eux les arcs bissecteurs des angles, on

(*) Le lecteur est prié d'intervertir les lettres B′ et C′ de la figure 6.

pourrait considérer les triangles polaires des triangles OBP, O'BP (fig. 4). Il est plus simple d'utiliser le théorème démontré au § 7.

Soient I, I', I'', I''' (fig. 7) les pôles des cercles tritangents aux côtés du triangle ABC, IX et I'Y des arcs perpendiculaires sur AC; AC joint les pieds des arcs menés par I'' perpendiculairement sur IA et IC; donc (7) les angles CII'', AIX sont égaux; il en est de même des angles AI'Y, I'''I'C. Désignons par δ_a, δ_b, δ_c, δ'_a ... les arcs AI, BI, CI, AI', ..., par $(\delta_b\ \delta_c)$ ... les angles que font ces arcs deux à deux, et par r, r', r'', r''' les rayons sphériques des cercles tritangents. Les relations entre tous ces éléments sont fournies immédiatement par les triangles AIX, AI'Y, CIX, CI'Y, etc.; nous indiquons dans la

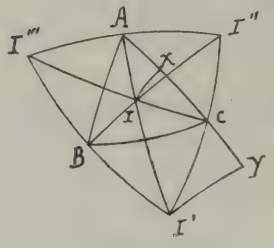


Fig. 7.

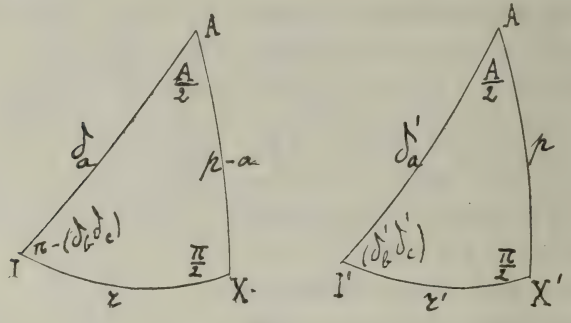


Fig. 7'.

figure 7' les côtés et les angles des deux premiers de ces triangles. On obtient ainsi

$$\operatorname{tg} r = \sin(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}, \quad \cos(\delta_b\delta_c) = \cos(p-a)\sin\frac{A}{2},$$

$$\sin(\delta_b\delta_c) = \cos\frac{A}{2} : \cos r, \quad \cos\delta_a = -\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}(\delta_b\delta_c), \text{ etc.}$$

II. — Arcs divisant la surface du triangle en parties équivalentes.

10. Soit M un point quelconque de la sphère tel que les deux triangles MAB, MCA (fig. 8) aient même excès sphérique $2E'$; on a

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{AM}{2}=\frac{\sin E'}{\sin(A_1-E')},$$

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{AM}{2}=\frac{\sin E'}{\sin(A_2-E')};$$

d'où

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}}=\frac{\sin(A_1-E')}{\sin(A_2-E')},$$

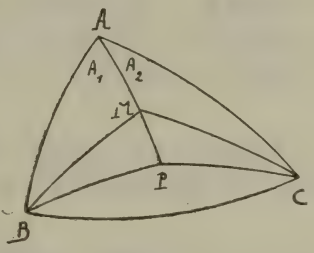


Fig. 8.

ou successivement,

$$\frac{\sin(B-E)}{\sin(C-E)}=\frac{\sin(A_1-E')}{\sin(A_2-E')},$$

$$\frac{\sin(A_1-E')-\sin(A_2-E')}{\sin(A_1-E')+\sin(A_2-E')}=\frac{\sin(B-E)-\sin(C-E)}{\sin(B-E)+\sin(C-E)}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{A_1-A_2}{2}}{\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}-E'\right)}=\frac{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{A}{2}}.$$

Cette égalité peut s'écrire

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{A_1-A_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A_1+A_2}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}}{\operatorname{cotg}\left(\frac{A}{2}-E'\right)};$$

d'où

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{A_1+A_2}{2}+\operatorname{tg}\frac{A_1-A_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A_1+A_2}{2}-\operatorname{tg}\frac{A_1-A_2}{2}}=\frac{\operatorname{cotg}\left(\frac{A}{2}-E'\right)-\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}}{\operatorname{cotg}\left(\frac{A}{2}-E'\right)-\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}},$$

ou

$$\frac{\sin A_1}{\sin A_2}=\frac{\cos\left(\frac{A-B+C}{2}-E'\right)}{\cos\left(\frac{A+B-C}{2}-E'\right)}=\frac{\sin(B-E+E')}{\sin(C-E+E')}. \quad (6)$$

Construisons le triangle isoscèle PBC dont l'angle à la base PBC est égal à E-E′; on aura

$$\frac{\sin PAB}{\sin PBA}=\frac{\sin PB}{\sin PA}, \qquad \frac{\sin PAC}{\sin PCA}=\frac{\sin PC}{\sin PA};$$

d'où, puisque PB = PC,

$$\frac{\sin PAB}{\sin PAC}=\frac{\sin PBA}{\sin PCA}=\frac{\sin(B-E+E')}{\sin(C-E+E')}=\frac{\sin A_1}{\sin A_2}.$$

Donc *l'arc* AM *passe par* P.

On déduit de là les théorèmes suivants :

Si M, M′, M″ *sont trois points tels que les six triangles* MAB, MCA, M′AB, M′BC, M″BC, M″CA *aient la même surface* 2E′, *les arcs* AM, BM′, CM″ *passent par un même point. Si les coordonnées normales de ce point sont* x, y, z, *on a*

$$\sin x : \sin y : \sin z = \frac{1}{\sin(A-E+E')} : \frac{1}{\sin(B-E+E')} : \frac{1}{\sin(C-E+E'}$$

Lorsque les points B *et* C *sont fixes et les surfaces* 2E *et* 2E′ *constantes, l'arc* AM *passe par un point fixe.*

11. Deux cas particuliers du théorème précédent sont remarquables :

a) Supposons que $E' = \frac{E}{2}$; dans ce cas M est situé sur BC et AM est l'arc bissecteur de la surface ABC. L'égalité (6) devient

$$\sin A_1 : \sin A_2 = \sin\left(B - \frac{E}{2}\right) : \sin\left(C - \frac{E}{2}\right).$$

Par conséquent : 1° *Les arcs bissecteurs de la surface d'un triangle sphérique* ABC *passent par un même point* (*) *dont les distances sphériques* x, y, z *aux côtés du triangle vérifient les relations*

$$\sin x : \sin y : \sin z = \sin\left(A - \frac{E}{2}\right) : \sin\left(B - \frac{E}{2}\right) : \sin\left(C - \frac{E}{2}\right).$$

2° *Si la base* BC *est fixe et la surface constante, l'arc* AM *bissecteur de la surface passe par un point fixe* P.

Indiquons encore les propriétés suivantes, dont la démonstration est facile :

3° L'arc AM fait des angles égaux avec le côté BC et le cercle de Lexell.

4° On a la relation

$$\operatorname{tg}\frac{PM}{2} : \operatorname{tg}\frac{PA}{2} = \operatorname{tg}^2\frac{PB}{2}.$$

b) Soit $E' = \frac{E}{3}$; les arcs AM, BM, CM divisent alors la surface du triangle en trois parties égales. L'angle $PBC = \frac{2E}{3}$ et l'on a

$$\sin A_1 : \sin A_2 = \sin\left(B - \frac{2E}{3}\right) : \sin\left(C - \frac{2E}{3}\right).$$

Ainsi : *Si* x, y, z *sont les arcs de grands cercles menés perpen-*

(*) Théorème de Steiner.

diculairement aux côtés du triangle par le point M *tel que les surfaces* ABM, BCM, CAM *soient égales, on a*

$$\sin x : \sin y : \sin z = \frac{1}{\sin\left(A - \frac{2E}{3}\right)} : \frac{1}{\sin\left(B - \frac{2E}{3}\right)} : \frac{1}{\sin\left(C - \frac{2E}{3}\right)}.$$

Lorsque BC *est fixe et la surface* ABC *constante, l'arc* AM *passe par un point fixe.*

12. Soient M un point de l'arc BC (fig. 9), α l'angle AMB, et 2E, 2E′, 2E″ les excès sphériques des triangles ABC, ABM, AMC; on a

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cotg}\frac{AM}{2}\cdot\operatorname{cotg}\frac{BM}{2} &= \frac{\sin(\alpha - E')}{\sin E''} = \sin\alpha\operatorname{cotg}E' - \cos\alpha, \\ \operatorname{cotg}\frac{AM}{2}\cdot\operatorname{cotg}\frac{CM}{2} &= \frac{\sin(\alpha + E'')}{\sin E''} = \sin\alpha\operatorname{cotg}E'' + \cos\alpha. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

En divisant membre à membre ces formules, on obtient

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{BM}{2}}{\operatorname{tg}\frac{CM}{2}} = \frac{\operatorname{cotg}E'' + \operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{cotg}E' - \operatorname{cotg}\alpha}. \quad (8)$$

Voici quelques conséquences de la formule (8) :

a) Supposons $E' = E'' = \frac{E}{2}$; cette formule donne

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\frac{BM}{2} + \operatorname{tg}\frac{CM}{2}}{\operatorname{tg}\frac{BM}{2} - \operatorname{tg}\frac{CM}{2}}\operatorname{tg}\frac{E}{2},$$

ou

$$\sin\frac{BM - CM}{2}\operatorname{tg}\alpha = \sin\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{E}{2}. \quad (9)$$

Soit O le point de rencontre de AM (fig. 9) avec l'arc élevé

perpendiculairement à BC au milieu D de cet arc; DM est égal à $\frac{1}{2}$ (BM-CM) et dans les triangles rectangles ODM, OBD on a les relations

$$\operatorname{tg} OD = \sin \frac{BM - CM}{2} \operatorname{tg} \alpha = \sin \frac{a}{2} \operatorname{tg} OBD.$$

En comparant cette dernière égalité à la relation (9), on voit que l'angle OBD est égal à $\frac{E}{2}$; on retrouve ainsi le théorème énoncé précédemment (11, *a*).

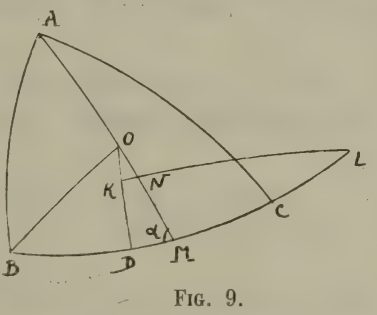


Fig. 9.

b) Soient AM, BM', CM'' les arcs qui divisent le triangle ABC en deux surfaces équivalentes et α, β, γ les angles AMB, BMC, CMA sous lesquels ces arcs rencontrent les côtés opposés; la relation connue

$$\operatorname{tg} \frac{BM}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{CM'}{2} \operatorname{tg} \frac{AM''}{2} = \operatorname{tg} \frac{CM}{2} \operatorname{tg} \frac{AM'}{2} \operatorname{tg} \frac{BM''}{2}$$

se transforme, si l'on tient compte de la relation (8), en la suivante

$$\left(\operatorname{cotg} \frac{E}{2} + \operatorname{cotg} \alpha\right)\left(\operatorname{cotg} \frac{E}{2} + \operatorname{cotg} \beta\right)\left(\operatorname{cotg} \frac{E}{2} + \operatorname{cotg} \gamma\right)$$

$$= \left(\operatorname{cotg} \frac{E}{2} - \operatorname{cotg} \alpha\right)\left(\operatorname{cotg} \frac{E}{2} - \operatorname{cotg} \beta\right)\left(\operatorname{cotg} \frac{E}{2} - \operatorname{cotg} \gamma\right);$$

d'où

$$\sum \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = - \operatorname{tg}^2 \frac{E}{2};$$

c) La formule (8) peut s'écrire ainsi :

$$\operatorname{cotg}\alpha\left(\operatorname{tg}\frac{BM}{2}+\operatorname{tg}\frac{CM}{2}\right)=\operatorname{tg}\frac{BM}{2}\operatorname{cotg}E'-\operatorname{tg}\frac{CM}{2}\operatorname{cotg}E'',$$

ou

$$\sin\frac{a}{2}\operatorname{cotg}\alpha=\sin\frac{BM}{2}\cos\frac{CM}{2}\operatorname{cotg}E'-\sin\frac{CM}{2}\cos\frac{BM}{2}\operatorname{cotg}E''$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sin\frac{BM+CM}{2}+\sin\frac{BM-CM}{2}\right)\operatorname{cotg}E'-\left(\sin\frac{BM+CM}{2}-\sin\frac{BM-CM}{2}\right)\operatorname{cotg}E''\Bigg]$$

Si l'on suppose BC, E′ et E″ constants, on aura donc entre BM, MC et α la relation

$$2\sin\frac{a}{2}\operatorname{cotg}\alpha=(\operatorname{cotg}E'+\operatorname{cotg}E'')\sin\frac{BM-CM}{2}$$

$$+\sin\frac{a}{2}(\operatorname{cotg}E'-\operatorname{cotg}E'').$$

Posons

$$\frac{2\sin\frac{a}{2}}{\operatorname{cotg}E'+\operatorname{cotg}E''}=M,\qquad\frac{\sin\frac{a}{2}(\operatorname{cotg}E''-\operatorname{cotg}E')}{\operatorname{cot}E'+\operatorname{cotg}E''}=N;$$

l'égalité précédente deviendra

$$\sin\frac{BM-CN}{2}=M\operatorname{cotg}\alpha+N. \qquad (10)$$

Soient D le milieu de BC et L le pôle de l'arc DK mené par D perpendiculairement à BC (fig. 9). Un grand cercle quelconque mené par L rencontre DK en K et AM en N; on a, dans le triangle LMN,

$$\cos MNL=\cos\alpha\cos L+\sin\alpha\sin L\cos ML$$

$$=\cos\alpha\cos L+\sin\alpha\sin L\sin\frac{BM-CM}{2},$$

ou en tenant compte de l'égalité (10),

$$\left.\begin{aligned}\cos \mathrm{MNL} &= \cos\alpha\cos \mathrm{L} + \sin\alpha\sin \mathrm{L}\,(\mathrm{M}\operatorname{cotg}\alpha + \mathrm{N})\\ &= (\cos \mathrm{L} + \mathrm{M}\sin \mathrm{L})\cos\alpha + \mathrm{N}\sin \mathrm{L}\sin\alpha.\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Déterminons maintenant L par la condition

$$(\cos \mathrm{L} + \mathrm{M}\sin \mathrm{L})^2 + \mathrm{N}^2\sin^2 \mathrm{L} = 1\,;$$

d'où

$$\operatorname{tg} \mathrm{L} = -2\mathrm{M} : (\mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2 - 1);$$

on pourra alors poser

$$\cos \mathrm{L} + \mathrm{M}\sin \mathrm{L} = \cos\varphi, \qquad \mathrm{N}\sin \mathrm{L} = \sin\varphi,$$

et l'égalité (11) deviendra

$$\cos \mathrm{MNL} = \cos(\alpha - \varphi); \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{MNL} = \pm(\alpha - \varphi).$$

Si l'on adopte le signe +, la somme des angles MNL, NML est constante et, par suite, la surface MNL est constante.

Si l'on prend le signe —, c'est la surface MN′L qui restera constante, N′ étant le point diamétralement opposé à N.

Ainsi : *Si la base* BC *d'un triangle* ABC *est fixe et sa surface constante, l'arc* AM *qui divise cette surface dans un rapport donné détermine avec le côté* BC *et un second grand cercle fixe un triangle de surface constante.*

On déduit de là que AM enveloppe une conique sphérique.

d) Si, dans la formule (8), on suppose que AM soit médiane, on obtient

$$2\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{cotg} \mathrm{E}' - \operatorname{cotg} \mathrm{E}''.$$

13. En retranchant membre à membre les formules (7), après avoir fait $\mathrm{E}' = \mathrm{E}'' = \frac{\mathrm{E}}{2}$, on obtient

$$\operatorname{cotg}\frac{\mathrm{AM}}{2}\left(\operatorname{cotg}\frac{\mathrm{CM}}{2} - \operatorname{cotg}\frac{\mathrm{BM}}{2}\right) = 2\cos\alpha,$$

ou

$$\operatorname{tg}\frac{AM}{2}\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(\operatorname{cotg}\frac{CM}{2} - \operatorname{cotg}\frac{BM}{2}\right).$$

Soit N le milieu de AM (fig. 10); de N, menons NP perpendiculairement sur BC. On a dans le triangle MNP

$$\operatorname{tg} MP = \operatorname{tg} MN \cos\alpha = \operatorname{tg}\frac{AM}{2}\cos\alpha;$$

donc

$$\operatorname{tg} MP = \frac{1}{2}\left(\operatorname{cotg}\frac{CM}{2} - \operatorname{cotg}\frac{BM}{2}\right).$$

Si l'on suppose fixes les points M, B, C, la distance MP sera donc constante et le point N décrira un grand cercle perpendiculaire à BC; par suite (2), A décrira un petit cercle dont le pôle est situé sur BC. Ainsi : *Si trois points* A, M, C *situés sur un même grand cercle sont fixes, le lieu d'un point* A *tel que les triangles* ABM, AMC *aient la même surface est un petit cercle.*

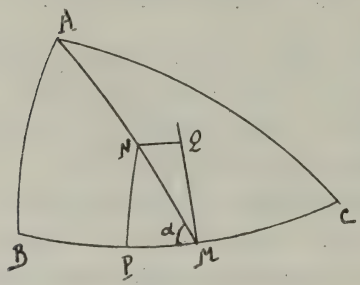


FIG. 10.

14. Le théorème précédent peut être généralisé. Au lieu de supposer égales les surfaces des triangles ABM, AMC, admettons qu'entre les excès sphériques de ces triangles existe une relation de la forme

$$m \operatorname{cotg} E' + n \operatorname{cotg} E'' = q,$$

m, n, q étant des constantes, et proposons-nous de trouver le lieu de A, les points B, M, C étant fixes. Additionnons membre

à membre les relations (7) multipliées respectivement par m et par n; nous obtenons

$$\sin\alpha\,(m\operatorname{cotg}E' + n\operatorname{cotg}E'') + (n-m)\cos\alpha = \operatorname{cotg}\frac{AM}{2}\left(m\operatorname{cotg}\frac{BM}{2} + n\operatorname{cotg}\frac{CM}{2}\right),$$

ou

$$q\sin\alpha\operatorname{tg}\frac{AM}{2} + (n-m)\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{AM}{2} = m\operatorname{cotg}\frac{BM}{2} + n\operatorname{cotg}\frac{CM}{2}. \quad (12)$$

En M menons un grand cercle perpendiculaire sur BC (fig. 10), et du milieu N de AM abaissons sur ce cercle et sur BC les arcs perpendiculaires NQ et NP; on a

$$\operatorname{tg}MQ = \sin\alpha\operatorname{tg}\frac{AM}{2}, \quad \operatorname{tg}MP = \cos\alpha\operatorname{tg}\frac{AM}{2}.$$

L'égalité (12) devient donc

$$q\operatorname{tg}MQ + (n-p)\operatorname{tg}MP = m\operatorname{cotg}\frac{BM}{2} + n\operatorname{cotg}\frac{CM}{2}. \quad (13)$$

Si l'on prend comme axes coordonnés MB et MQ, MP et MQ sont les coordonnés de N et l'équation (13) représente un grand cercle. Le point N décrit donc un grand cercle et, par conséquent (2), *le lieu de* A *est un petit cercle.*

15. La plupart des résultats précédents pourraient se déduire de la remarque de M. Cesàro rappelée au § 4. Nous nous bornerons à démontrer au moyen de cette remarque une généralisation de la formule (6) du § 10.

Soient B′, C′ les points diamétralement opposés aux sommets B, C du triangle sphérique ABC, M un point quelconque de la sphère et A_1, B_1, C_1, B_1', C_1', M_1 (fig. 11) les projections stéréographiques des points A, B, C, B′, C′, M sur un plan perpendiculaire au rayon OA. Les droites $B_1A_1B_1'$, $C_1A_1C_1'$, A_1M_1

sont les projections des grands cercles AB, AC, AM; les cercles $B_1C_1B'_1C'_1$, $C_1M_1C'_1$, $B_1M_1B'_1$ sont celles des cercles BC, CM, BM. Désignons par 2E, 2E'', 2E''' les excès sphériques des triangles ABC, AMC, AMB; les excès sphériques des triangles ACB', AC'B sont égaux à 2B-2E et 2C-2E. Il résulte de la remarque énoncée au § 4 que les arcs B_1C_1, M_1C_1, M_1B_1, B'_1C_1, C'_1B_1 ont mêmes mesures que 2E, 2E'', 2E''', 2B-2E, 2C-2E; par suite,

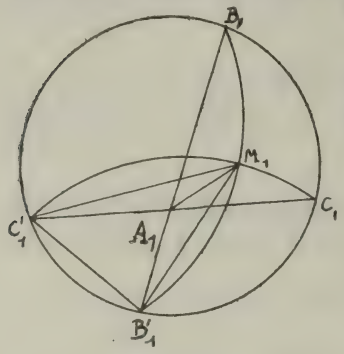


Fig. 11.

$$M_1C'_1C_1 = E'', \quad M_1B'_1B_1 = E''',$$
$$A_1C'_1B'_1 = B - E, \quad A_1B'_1C'_1 = C - E.$$

Soient A_1 et A_2 les angles MAB, MAC que forme le grand cercle AM avec les grands cercles AB et AC; les angles $M_1A_1B'_1$, $M_1A_1C'_1$ sont égaux à $\pi - A_1$ et $\pi - A_2$ et l'on a, dans les triangles $M_1A_1B'_1$, $M_1A_1C'_1$,

$$\frac{\sin A_1}{\sin E'''} = \frac{M_1B'_1}{M_1A_1}, \quad \frac{\sin A_2}{\sin E''} = \frac{M_1C'_1}{M_1A_1};$$

d'où

$$\frac{\sin A_1}{\sin A_2} = \frac{\sin E'''}{\sin E''} \cdot \frac{M_1B'_1}{M_1C'_1} = \frac{\sin E'''}{\sin E''} \cdot \frac{\sin M_1C'_1B'_1}{\sin M_1B'_1C'_1},$$

ou

$$\frac{\sin A_1}{\sin A_2} = \frac{\sin E''' \cdot \sin (B - E + E'')}{\sin E'' \cdot \sin (C - E + E''')}.$$

En faisant, dans cette formule, $E'' = E'''$ on retrouve la formule (6); on en déduit aussi le théorème suivant :

Si 2E', 2E'', 2E''' *sont les excès sphériques des triangles* MBC,

MAC, MAB *et* x, y, z *les distances sphériques du point* M *aux côtés du triangle* ABC, *on a*

$$\sin x : \sin y : \sin z = \frac{\sin E'}{\sin (A-E+E')} : \frac{\sin E''}{\sin (B-E+E'')} : \frac{\sin E'''}{\sin (C-E+E''')}.$$

III. — Figures rectilignes associées au quadrilatère sphérique.

16. *Premier quadrilatère rectiligne associé au quadrilatère sphérique.* — Désignons par a, b, c, d les côtés AB, BC, CD, DA, par f, g les diagonales BD, AC du quadrilatère sphérique ABCD et par 2E, 2E′, 2E″ les excès sphériques du quadrilatère ABCD et des triangles ABD, BCD. Construisons les triangles dérivés des triangles ABD, BCD et juxtaposons ces triangles de façon à faire coïncider les deux côtés égaux à $\cos\frac{f}{2}$; nous obtenons ainsi un quadrilatère (*premier quadrilatère associé à* ABCD) XYZU dont les éléments sont indiqués dans la figure 12.

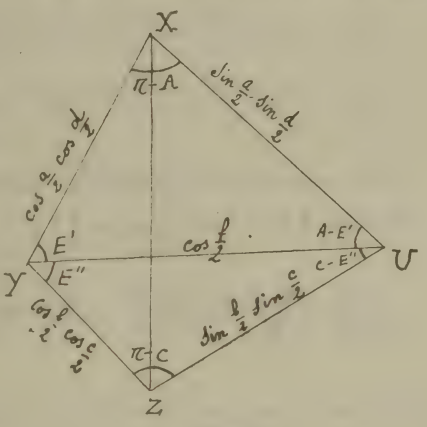


Fig. 12.

17. *Aire du quadrilatère inscriptible.* — Lorsque ABCD est inscriptible, on a

$$A + C = B + D = \pi + E;$$

donc

$$\text{angle XUZ} = A + C - E = \pi.$$

Les points X, U, Z sont alors en ligne droite et

$$XZ = \sin\frac{a}{2}\sin\frac{d}{2} + \sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}.$$

Par suite, on a dans le triangle XYZ

$$\left(\sin\frac{a}{2}\sin\frac{d}{2} + \sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\right)^2 = \cos^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{d}{2} + \cos^2\frac{b}{2}\cos^2\frac{c}{2} - 2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}\cos E;$$

d'où

$$\cos E = \frac{\cos a + \cos b + \cos c + \cos d}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}} - \operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{d}{2}.$$

Pour calculer $\sin\frac{E}{2}$ et $\cos\frac{E}{2}$, représentons par a', b', c' les côtés XZ, XY, YZ du triangle XYZ; nous aurons

$$\sin\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{(p'-b')(p'-c')}{b'c'}}, \quad \cos\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{p'(p'-a')}{a'c'}}.$$

Or,

$$2p' = \cos\frac{a-d}{d} + \cos\frac{b-c}{2} = 2\cos\frac{p-c-d}{2}\cos\frac{p-b-d}{2};$$

de même,

$$2p' - 2a' = 2\cos\frac{p}{2}\cos\frac{p-a-d}{2},$$

$$2p' - 2b' = 2\sin\frac{p-b}{2}\sin\frac{p-c}{2},$$

$$2p' - 2c' = 2\sin\frac{p-a}{2}\sin\frac{p-d}{2}.$$

Donc,

$$\sin\frac{E}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{p-a}{2}\sin\frac{p-b}{2}\sin\frac{p-c}{2}\sin\frac{p-d}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}}},\quad(14)$$

$$\cos\frac{E}{2}=\sqrt{\frac{\cos\frac{p}{2}\cos\frac{p-a-d}{2}\cos\frac{p-b-d}{2}\cos\frac{p-c-d}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}}}.$$

Signalons encore les formules suivantes dont la démonstration est immédiate au moyen du triangle XYZ :

$$\cos E=\frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{d}{2}+\left(\sin\frac{a}{2}\sin\frac{d}{2}+\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\right)\cos A}{\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}},$$

$$\sin A:\sin C:\sin E$$
$$=\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}:\cos\frac{a}{2}\cos\frac{d}{2}:\left(\sin\frac{a}{2}\sin\frac{d}{2}+\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\right).$$

18. *Second quadrilatère rectiligne associé au quadrilatère sphérique.* — Soit D_1 un point situé du même côté que D par rapport à AC et tel que les triangles sphériques DAC, D_1CA soient symétriques, de sorte que (*)

$$AD_1=c,\qquad CD_1=d,\qquad \text{angle } D_1=\text{angle } D.$$

Construisons, de la même façon que précédemment, le premier quadrilatère rectiligne associé à $ABCD_1$; le quadrilatère

(*) Le lecteur est prié de tracer la figure.

X′Y′Z′U′ ainsi obtenu sera appelé le *second quadrilatère rectiligne* associé à ABCD et l'on aura (§ 16)

$$X'Y' = \cos\frac{a}{2}\cos\frac{c}{2}, \quad Y'Z' = \cos\frac{b}{2}\cos\frac{d}{2}, \quad Z'U' = \sin\frac{b}{2}\sin\frac{d}{2},$$

$$U'X' = \sin\frac{a}{2}\sin\frac{c}{2}, \quad Y' = E, \quad U' = A + C - E.$$

La diagonale X′Z′ est égale à $\sin\frac{f}{2}\sin\frac{g}{2}$. En effet, si A′, C′, D′ sont les points inverses de A, C, D par rapport au centre d'inversion B (puissance k), on a

$$A'C' = \frac{k \cdot AC}{BA \cdot BC} = \frac{k.\sin\frac{g}{2}}{2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}, \quad A'D' = \frac{k \cdot \sin\frac{d}{2}}{2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{f}{2}},$$

$$C'D' = \frac{k \cdot \sin\frac{c}{2}}{2\sin\frac{b}{2}\sin\frac{f}{2}};$$

d'où

$$A'C' : A'D' : C'D' = \sin\frac{f}{2}\sin\frac{g}{2} : \sin\frac{b}{2}\sin\frac{d}{2} : \sin\frac{a}{2}\sin\frac{c}{2}.$$

L'angle D′ du triangle A′C′D′ est égal à l'angle des cercles ABD, ACD, inverses des droites A′D′, C′D′; or, ces cercles font avec BD des angles égaux à A-E′, C-E″ (§ 1); donc D′ = A + C — E = U′. Par conséquent, les triangles A′C′D′ et Z′X′U′, qui ont un angle égal compris entre côtés proportionnels, sont semblables et l'on a

$$X'Z' = \sin\frac{f}{2}\sin\frac{g}{2}.$$

Les éléments du quadrilatère X′Y′Z′U′ sont indiqués dans la figure 13. Ce quadrilatère se réduit au triangle X′Y′Z′ quand ABCD est inscriptible.

19. *Surface du quadrilatère sphérique quelconque.* — Le triangle X′Y′Z′ donne

$$\cos E = \frac{\cos^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{c}{2} + \cos^3\frac{b}{2}\cos^2\frac{d}{2} - \sin^2\frac{f}{2}\sin^2\frac{g}{2}}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}};$$

d'où

$$\sin\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{\sin^2\frac{f}{2}\sin^2\frac{g}{2} - \left(\cos\frac{a}{2}\cos\frac{c}{2} - \cos\frac{b}{2}\cos\frac{d}{2}\right)^2}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}}}. \quad (15)$$

Lorsque ABCD est inscriptible, X′, U′, Z′ sont en ligne droite; ainsi, *suivant que* ABCD *est ou n'est pas inscriptible, le produit* $\sin\frac{f}{2}\sin\frac{g}{2}$ *est égal ou inférieur à la somme des produits* $\sin\frac{a}{2}\sin\frac{c}{2}$ *et* $\sin\frac{b}{2}\sin\frac{d}{2}$. La formule (15) montre que *de tous les quadrilatères sphériques que l'on peut former avec quatre côtés donnés, celui qui a la plus grande surface est celui qui est inscriptible.*

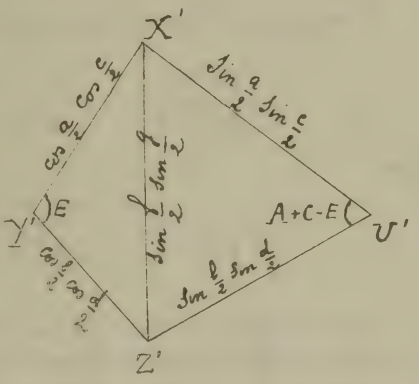


Fig. 13.

20. *Autres figures associées au quadrilatère sphérique.* — En construisant le triangle des éléments et le triangle dérivé du triangle polaire d'un triangle ABC, on obtient des nouvelles figures pouvant servir à établir aussi bien que les premières les formules de la trigonométrie sphérique. En opérant sur ces triangles comme nous l'avons fait aux paragraphes 16 et 18 pour construire les quadrilatères XYZU, X′Y′Z′U′, on obtien-

drait de nouveaux quadrilatères rectilignes associés à ABCD. Mais il est inutile de faire cette construction, car les formules que l'on obtiendrait par la considération de ces quadrilatères ne sont que les corrélatives des formules que nous avons déjà obtenues et s'obtiennent en appliquant ces formules au quadrilatère polaire de ABCD. Nous signalerons les formules suivantes, dans lesquelles F et G désignent les angles formés par les couples de côtés AB et CD, AD et BC :

$$\cos p = \frac{\cos^2\frac{F}{2}\cos^2\frac{G}{2} - \sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{C}{2} - \sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{D}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2}}$$

$$\cos\frac{p}{2} = \sqrt{\frac{\cos^2\frac{F}{2}\cos^2\frac{G}{2} - \left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\sin\frac{D}{2}\right)^2}{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2}}}. \quad (16)$$

Suivant que ABCD *est ou n'est pas circonscriptible, on a*

$$\cos\frac{F}{2}\cos\frac{G}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{B}{2}\cos\frac{D}{2},$$

ou

$$\cos\frac{F}{2}\cos\frac{G}{2} < \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{B}{2}\cos\frac{D}{2}.$$

Par conséquent, *de tous les quadrilatères équiangles, celui qui a le plus petit périmètre est le quadrilatère circonscriptible.*

Dans le cas du quadrilatère circonscriptible, la formule (16) devient

$$\cos\frac{p}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{A-E}{2}\sin\frac{B-E}{2}\sin\frac{C-E}{2}\sin\frac{D-E}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2}}}. \quad (17)$$

Dans ce cas, on a aussi

$$\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\sin a} = \frac{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2}}{\sin b} = \frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2}}{\sin p}.$$

Lorsque ABCD est à la fois inscriptible et circonscriptible, on a

$$A + C = B + D, \qquad a + c = b + d,$$

et les formules (14) et (17) deviennent

$$\sin\frac{E}{2} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{d}{2}},$$

$$\cos\frac{p}{2} = \sqrt{\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}\operatorname{cotg}\frac{D}{2}}.$$

SUR

UNE CLASSE DE DÉTERMINANTS

PAR

LOUIS FOUARGE

Docteur en sciences physiques et mathématiques,
Répétiteur à l'Université de Liége.

La Commission du Patrimoine universitaire liégeois a pris à sa charge les frais d'impression de ce mémoire.

SUR

UNE CLASSE DE DÉTERMINANTS

Parmi les propriétés les plus intéressantes des déterminants orthogonaux, il convient, semble-t-il, de ranger un théorème démontré par Brioschi, dans le *Journal de Liouville*, tome XIX, page 253, théorème que nous énoncerons comme suit :

Si le déterminant

$$S = (\pm \alpha_{11}\alpha_{22} \dots \alpha_{nn})$$

est orthogonal, l'équation

$$S(x) \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{11} - x & \alpha_{12} & \dots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - x & \dots \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots \alpha_{nn} - x \end{vmatrix} = 0$$

est réciproque.

Cette proposition découle de deux remarques très simples :

a) *Soient*

$$D = (\pm a_{11}a_{22} \dots a_{nn})$$

un déterminant différent de zéro et

$$X_1, X_2, \dots X_n,$$

les racines de l'équation

$$D(x) = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nn} - x \end{vmatrix} = 0. \qquad (A)$$

Si nous représentons par

$$R = (\pm A_{11}A_{22} \dots A_{nn})$$

le déterminant réciproque de D, *on voit facilement que l'équation*

$$R\ Dx) \equiv \begin{vmatrix} A_{11} - Dx & A_{12} & \dots A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} - Dx & \dots A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots A_{nn} - Dx \end{vmatrix} = 0 \qquad (B)$$

admet les racines

$$\frac{1}{X_1}, \quad \frac{1}{X_2}, \quad \dots, \quad \frac{1}{X_n}.$$

b) *Un déterminant orthogonal dont la valeur est l'unité et le déterminant réciproque correspondant sont identiques. Si la valeur du déterminant orthogonal est* — 1, *le réciproque correspondant en diffère seulement par les signes de tous les termes.*

Cela posé, la proposition de Brioschi rappelée ci-dessus se traduit par l'identité

$$D(x) \equiv R(Dx). \qquad (C)$$

La recherche et l'étude de déterminants non orthogonaux, pour lesquels la relation (C) est vérifiée, constituent le but de la première partie de ce travail.

Un déterminant particulier, considéré par Hermite, nous fournit l'occasion de définir $2n^2$, quantités b_{jk}, b'_{jk} données

ci-après par les formules (10) et (11). Ces nombres se partagent en deux groupes de n^2 éléments satisfaisant aux égalités

$$\sum_{k=1}^{k=n} b_{hk}b'_{hk} = 1; \quad \sum_{k=1}^{k=n} b_{hk}b'_{jk} = 0; \quad (h, j = 1, 2 \dots n, h \gtrless j). \qquad (E)$$

Au moyen des b_{jk}, b'_{jk}, nous construirons des déterminants B, B′ réciproques l'un de l'autre et dont la propriété fondamentale est exprimée par le théorème II :

La somme des mineurs principaux d'ordre λ *de* B *est égale à la somme des mineurs principaux d'ordre* λ *de* B′ ($\lambda = 1, 2, \dots n-1$).

Par ailleurs, cette proposition constitue pour les déterminants considérés la condition nécessaire et suffisante de l'existence de l'identité (C).

Parmi les propriétés des déterminants B, B′ établies dans ce premier paragraphe, signalons encore les énoncés V, VII. Ceux-ci correspondent à d'élégants théorèmes donnés par Siacci sur les déterminants orthogonaux.

La seconde partie de cette note est consacrée à l'équation

$$B(x) = 0.$$

Nous énoncerons les théorèmes VIII et VIII′ en supposant que les déterminants B et B′ sont les plus généraux satisfaisant aux conditions (E) et jouissant de la propriété exprimée par le théorème II.

Pour préparer l'examen des cas particuliers, il est utile de calculer le polynôme

$$B(x) \cdot B'(-x).$$

On peut déduire de son expression la définition d'une classe de déterminants qui, à un certain point de vue, comprennent les déterminants symétriques gauches comme cas particulier. (Voir théorème X.)

Ces préliminaires posés, nous obtiendrons divers théorèmes

concernant l'équation $S(x) = 0$ déduite d'un déterminant orthogonal. L'un d'eux (XI) est le théorème de Brioschi sous sa forme complète, dont nous avons précisé les cas d'applicabilité.

Les déterminants orthogonaux d'ordre pair, considérés dans les alinéas 20 et 21, nous semblent dignes de remarque. Les éléments de la diagonale principale sont réels et égaux entre eux ; deux éléments, tels que a_{ij}, a_{ji}, $j \gtrless i$, sont des quantités imaginaires conjuguées. Quant à l'équation réciproque $S(x) = 0$ correspondante, elle est de la forme

$$(x^2 - 2ax + 1)^{\frac{n}{2}} = 0$$

et ses racines sont toujours réelles. (Théorèmes XIII et XIV.)

Nous terminerons l'examen des cas particuliers, en énonçant un théorème (XVI) qui se rapporte aux déterminants B, B′, étudiés dans la première partie.

Comme application, on est naturellement conduit à étudier des déterminants orthogonaux symétriques que l'on peut déduire des déterminants inversement orthogonaux considérés par Sylvester. Nous serons amené à énoncer un théorème (XVII) applicable à certains déterminants construits suivant une proposition de Kronecker (voir n° 26) :

Soient $\delta = (\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2)$ *un déterminant du second ordre,* Δ *un déterminant d'ordre* n. *La méthode de Kronecker donne la loi de formation d'un déterminant d'ordre* 2n *dont la valeur est* $\delta^n \Delta^2$.

Cela posé, voici le théorème XVII :

La somme des mineurs principaux d'ordre $2\nu + 1$, $(\nu = 0, 1, \ldots n - 1)$, *du déterminant* $\delta^n \Delta^2$ *contient le binôme* $\alpha_1 + \beta_2$ *en facteur.*

Liége, le 14 août 1920.

Depuis la préparation de ce mémoire, nous avons pu résoudre le problème suivant : *Construire tous les déterminants* B, B′

égaux à 1, vérifiant les équations de réciprocité (équations 12) et les hypothèses du théorème II.

Nous en avons indiqué la solution dans une note annexe. (Théorèmes XVIII, XIX et XX.)

Liége, le 30 novembre 1920.

---

§ 1.

1. Nous représentons par

$$D = (\pm a_{11}a_{22}\dots a_{nn}) \qquad (1)$$

un déterminant d'ordre n qui répond aux conditions suivantes :

1° *Tous les éléments de la diagonale principale sont réels.* On pourra même les supposer égaux entre eux, pourvu toutefois que leur valeur commune ne vérifie pas l'équation

$$\begin{vmatrix} x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & x & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & x \end{vmatrix} = 0.$$

2° *Deux éléments :* a_{jk}, a_{kj}, *symétriquement placés par rapport à la diagonale principale, sont des quantités imaginaires conjuguées.* Nous écrirons sous forme explicite

$$a_{jk} = \alpha_{jk} + i\beta_{jk}, \quad a_{kj} = \alpha_{jk} - i\beta_{jk}; \quad (j, k = 1, 2, \dots n, j \gtrless k). \qquad (2)$$

Nous emploierons la notation habituelle A_{jk}, $(j, k = 1, 2, \dots n)$, pour représenter les mineurs du premier ordre

de D, affectés de signes déterminés par la règle connue (compléments algébriques).

On voit immédiatement que tout mineur principal A_{kk} est un déterminant de même forme que D et que deux mineurs A_{jk}, A_{kj}, occupant des positions symétriques par rapport à la diagonale principale, sont des quantités imaginaires conjuguées.

Par conséquent, le déterminant R réciproque de D est aussi de la forme (1).

On peut montrer que la valeur de D *est réelle.*

D'abord, cela se vérifie directement pour $n = 2$.

Supposons cette proposition établie pour $n - 1$. Si nous effectuons le développement du déterminant d'ordre n par la règle de Laplace, successivement suivant les éléments de la première ligne et suivant les éléments de la première colonne, nous trouverons deux expressions imaginaires conjuguées. Comme elles doivent être identiques, la propriété annoncée a lieu.

2. Cela posé, considérons trois groupes, chacun de n indéterminées :

$$x_1, x_2, \dots x_n;$$
$$y_1, y_2, \dots y_n;$$
$$z_1, z_2, \dots z_n;$$

donnant lieu aux relations suivantes :

$$x_h = a_{h1}z_1 + a_{h2}z_2 + \dots + a_{hh}z_h + \dots + a_{hn}z_n; \qquad (3)$$
$$y_h = a_{1h}z_1 + a_{2h}z_2 + \dots + a_{hh}z_h + \dots + a_{nh}z_n; \qquad (4)$$
$$(h = 1, 2, \dots n).$$

x_h correspond à la ligne de rang h de D, y à la colonne de même rang.

Nous pouvons déduire de (3) et (4) les expressions des z_j, $(j = 1, 2, \dots n)$, soit en fonction des x, soit en fonction des y.

Dans ce but, additionnons membres à membres les équations (3), multipliées respectivement par A_{1j}, A_{2j}, ... A_{nj}. Il vient

$$A_{1j}x_1 + A_{2j}x_2 + \cdots + A_{nj}x_n = Dz_j. \qquad (5)$$

D'autre part, on tire des équations (4) par le même procédé, les multiplicateurs étant cette fois A_{j1}, A_{j2}, ..., A_{jn} :

$$A_{j1}y_1 + A_{j2}y_2 + \cdots + A_{jn}y_n = Dz_j. \qquad (6)$$

3. Quelques transformations algébriques simples vont nous conduire à la définition des éléments des déterminants B, B′ dont il a été question dans l'introduction.

Eu égard aux expressions des éléments de D, on peut écrire pour $h = 1, 2, \ldots n$

$$\frac{x_h - y_h}{2i} = \beta_{h1}z_1 + \beta_{h2}z_2 + \cdots + \beta_{hh-1}z_{h-1} + \beta_{hh+1}z_{h+1} + \cdots + \beta_{hn}z_n, \quad (7)$$

ou

$$\frac{x_h - y_h}{2i} = \sum_{j=1}^{j=n}{}' \beta_{hj}z_j \quad (7); \qquad (h = 1, \text{ ou } 2, 3 \ldots n).$$

L'accent ajouté au signe Σ indique que dans la somme il n'existe aucun terme correspondant à $j = h$.

On transforme de deux manières les expressions des différences

$$\frac{x_h - y_h}{2i}$$

en y substituant les valeurs des z_j.

En employant d'abord, à cet effet, les formules (5), la forme du résultat, après multiplication par D, est celle-ci :

$$\frac{D}{2i}(x_h - y_h) = x_1 \sum_{k=1}^{n}{}' \beta_{hk}A_{1k} + x_2 \sum_{k}{}' \beta_{hk}A_{2k} + \ldots + x_n \sum_{k}{}' \beta_{hk}A_{nk}.$$

Si, au contraire, on se sert des relations (6), il viendra

$$\frac{D}{2i}(x_h - y_h) = y_1 \sum_{k=1}^{n}{}' \beta_{hk} A_{k1} + y_2 \sum_{k}{}' \beta_{hk} A_{k2} + \dots + y_n \sum_{k}{}' \beta_{hk} A_{kn}.$$

La signification de l'accent qui affecte les signes de sommation reste celle qui a déjà été indiquée. Ajoutons que les formules précédentes sont établies pour h variant de 1 à n.

Le premier groupe de formules sert à exprimer les y au moyen des x ; avec le second, on exprime les x par les y. Supposons la résolution effectuée ; nous pourrons écrire le résultat comme il suit :

$$y_h = b'_{1h} x_1 + b'_{2h} x_2 + \dots + b'_{nh} x_n ; \qquad (8)$$

$$x_h = b_{h1} y_1 + b_{h2} y_2 + \dots + b_{hn} y_n ; \quad [h = 1, 2, \dots n] ; \qquad (9)$$

en posant

$$b_{hh} = 1 + \frac{2i}{D} \sum_{k=1}^{k=n}{}' \beta_{hk} A_{kh}, \quad b_{hj} = \frac{2i}{D} \sum_{k=1}^{k=n}{}' \beta_{hk} A_{kj} ;$$

$$b'_{hh} = 1 - \frac{2i}{D} \sum_{k=1}^{k=n}{}' \beta_{hk} A_{hk}, \quad b'_{jh} = -\frac{2i}{D} \sum_{k=1}^{k=n}{}' \beta_{hk} A_{jk},$$

ou, sous forme explicite,

$$\left.\begin{aligned} b_{hh} &= 1 + \frac{2i}{D}(\beta_{h1} A_{1h} + \beta_{h2} A_{2h} + \dots + \beta_{hh-1} A_{h-1h} + \beta_{hh+1} A_{h+1h} + \dots + \beta_{hn} A_{nh}) \\ b_{hj} &= \frac{2i}{D}(\beta_{h1} A_{1j} + \beta_{h2} A_{2j} + \dots + \beta_{hh-1} A_{h-1j} + \beta_{hh+1} A_{h+1j} + \dots + \beta_{hn} A_{nj}) \end{aligned}\right\} \quad (10$$

$$\left.\begin{aligned} b'_{hh} &= 1 - \frac{2i}{D}(\beta_{h1} A_{h1} + \beta_{h2} A_{h2} + \dots + \beta_{hh-1} A_{hh-1} + \beta_{hh+1} A_{hh+1} + \dots + \beta_{hn} A_{hn}) \\ b'_{jh} &= -\frac{2i}{D}(\beta_{h1} A_{j1} + \beta_{h2} A_{j2} + \dots + \beta_{hh-1} A_{jh-1} + \beta_{hh+1} A_{jh+1} + \dots + \beta_{hn} A_{jn}) \end{aligned}\right\} \quad (11$$

4. Les b_{hh}, b_{hj}, b'_{hh}, b'_{jh}, $(h, j = 1, 2, \ldots n)$ définissent les éléments des déterminants B, B′ dont nous devons nous occuper. Mais, avant de passer à l'étude directe de ceux-ci, donnons les relations qui doivent exister, en vertu de (8) et (9), entre ces éléments.

Dans les expressions des x au moyen des y (formules 9), substituons les valeurs des y données par les équations (8). Il résultera de là un groupe de n relations linéaires entre les indéterminées $x_1, x_2, \ldots x_n$:

$$x_1 = x_1 \sum_k b_{1k} b'_{1k} + x_2 \sum_k b_{1k} b'_{2k} + \ldots + x_n \sum_k b_{1k} b'_{nk};$$

$$x_2 = x_1 \sum_k b_{2k} b'_{1k} + x_2 \sum_k b_{2k} b'_{2k} + \ldots + x_n \sum_k b_{2k} b'_{nk};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = x_1 \sum_k b_{nk} b'_{1k} + x_2 \sum_k b_{nk} b'_{2k} + \ldots + x_n \sum_k b_{nk} b'_{nk};$$

$$(k = 1, 2, \ldots n).$$

Comme ces relations doivent avoir lieu pour des valeurs arbitraires de $x_1, x_2, \ldots x_n$, elles sont des identités. Par suite, leur vérification exige l'existence des conditions suivantes, que nous appellerons désormais « équations de réciprocité » :

$$\sum_{k=1}^{k=n} b_{hk} b'_{hk} = 1; \quad \sum_{k=1}^{k=n} b_{hk} b'_{jk} = 0; \quad (h, j = 1, 2 \ldots n; h \gtrless j). \quad (12)$$

On ne manquera pas de remarquer l'analogie qui existe entre ces égalités et celles que l'on emploie habituellement pour définir un déterminant orthogonal (*).

(*) En partant d'un déterminant gauche, Cayley est parvenu, par une analyse peu différente de celle que nous venons d'exposer, à donner une méthode pour la construction de certains déterminants orthogonaux de valeur + 1. Il se sert des sommes $x_h + y_h$ au lieu des différences $x_h - y_h$. (J. de Crelle, t. XXXII.) On peut montrer que les deux procédés doivent conduire au même résultat; mais pour le cas envisagé ici, le procédé de Cayley amènerait pour les b_{jk} et b'_{jk} des expressions plus compliquées que celles qui sont écrites.

5. Appelons B le déterminant construit au moyen des b_{hj} définis par les formules (10), de manière que l'on a

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} b_{12} \dots b_{1n} \\ b_{21} b_{22} \dots b_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ b_{n1} b_{n2} \dots b_{nn} \end{vmatrix}; \qquad (13)$$

B′ sera le déterminant dont les éléments b'_{jh} seront définis par les formules (11).

Théorème I. — *La valeur numérique des déterminants* B *et* B′ *est l'unité positive.*

Le déterminant réciproque de B (B′) *est le déterminant* B′ (B).

Pour démontrer la première partie de ce théorème, effectuons le produit, lignes par lignes, de B par le déterminant initial D.

A cause des relations existant entre les nombres b_{hj} et les éléments de D, le déterminant-produit s'écrit

$$BD = \frac{2^n i^n}{D^n} \begin{vmatrix} \frac{a_{11}D}{2i} & D\beta_{12} + \frac{a_{21}D}{2i} & \dots & \beta_{1n}D + \frac{a_{n1}D}{2i} \\ \beta_{21}D + \frac{a_{12}D}{2i} & \frac{a_{22}D}{2i} & \dots & \beta_{2n}D + \frac{a_{n2}D}{2i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1}D + \frac{a_{1n}D}{2i} & \beta_{n2}D + \frac{a_{2n}D}{2i} & \dots & \frac{a_{nn}D}{2i} \end{vmatrix}.$$

A présent, tenons compte des formules (2):

$$a_{jh} = \alpha_{jh} + i\beta_{jh}, \quad \beta_{hj} = -\beta_{jh}.$$

Après quelques simplifications, on arrive à mettre le second membre de l'égalité précédente sous la forme

$$(\pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn}).$$

On obtient ainsi

$$BD = D,$$

c'est-à-dire le résultat annoncé,

$$B = 1 \qquad (14)$$

En faisant ensuite le produit B'D, colonne par colonne, on prouverait de même que l'on doit avoir :

$$B' = 1.$$

La justification de la seconde partie du théorème résulte de l'expression des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un déterminant Δ soit le réciproque d'un autre déterminant δ.

On sait que ces conditions se traduisent comme il suit :

Soient c_{jk} un élément quelconque de δ, c'_{jk} un élément de Δ. Si Δ est le déterminant réciproque de δ, on aura

$$\sum_{k=1}^{k=n} c_{hk}c'_{hk} = \delta; \qquad \sum_{k=1}^{n} c_{hk}c'_{jk} = 0; \quad (h, j = 1, 2, \ldots n, h \gtrless j).$$

Les formules (12) et (14) montrent qu'il en est bien ainsi pour B, B'. C'est pour cette raison que les égalités (12) ont été appelées équations de réciprocité.

6. Il peut être utile de faire remarquer que si l'on pose

$$b_{kj} = \gamma_{kj} + i\varepsilon_{kj}, \quad b'_{jk} = \gamma'_{jk} + i\varepsilon'_{jk},$$

on a

$$\gamma'_{jk} = \gamma_{kj}, \quad \varepsilon'_{jk} = -\varepsilon_{kj};$$

de sorte que les éléments de la ligne de rang s dans B et les éléments de la colonne de rang s de B' sont des quantités imaginaires conjuguées.

Par exemple, pour $n = 3$, on a

$$B = \begin{vmatrix} \gamma_{11}+i\varepsilon_{11} & \gamma_{12}+i\varepsilon_{12} & \gamma_{13}+i\varepsilon_{13} \\ \gamma_{21}+i\varepsilon_{21} & \gamma_{22}+i\varepsilon_{22} & \gamma_{23}+i\varepsilon_{23} \\ \gamma_{31}+i\varepsilon_{31} & \gamma_{32}+i\varepsilon_{32} & \gamma_{33}+i\varepsilon_{33} \end{vmatrix}, \quad B' = \begin{vmatrix} \gamma_{11}-i\varepsilon_{11} & \gamma_{21}-i\varepsilon_{21} & \gamma_{31}-i\varepsilon_{31} \\ \gamma_{12}-i\varepsilon_{12} & \gamma_{22}-i\varepsilon_{22} & \gamma_{32}-i\varepsilon_{32} \\ \gamma_{13}-i\varepsilon_{13} & \gamma_{23}-i\varepsilon_{23} & \gamma_{33}-i\varepsilon_{33} \end{vmatrix}.$$

L'examen de ce cas particulier conduit immédiatement aux propriétés suivantes :

1° *Tout mineur principal de* B *d'ordre* $n-\lambda$, $(\lambda = 1, 2 \ldots n-1)$ *et le mineur principal de* B′ *formé avec les lignes et les colonnes de* B′ *qui ont mêmes indices que celles employées dans* B, *sont des quantités imaginaires conjuguées.*

2° *Il en est de même pour tout mineur :* $B_{h_1k_1, h_2k_2, \ldots h_\lambda k_\lambda}$, *de* B *et celui qui s'en déduit dans* B′ *par permutation des indices des lignes et des colonnes* $B'_{k_1h_1, k_2h_2, \ldots k_\lambda h_\lambda}$.

3° *Des relations qui existent entre les mineurs d'un déterminant et de son réciproque résulte l'égalité d'un mineur quelconque* $B_{h_1k_1 \ldots h_nk_n}$ *de* B *avec le complémentaire dans* B′ *du mineur* $B'_{h_1k_1 \ldots h_nk_n}$.

4° Pour que les déterminants B, B′ se réduisent l'un à l'autre, ou autrement dit, pour obtenir un déterminant orthogonal, il faudra satisfaire à certaines conditions particulières. On pourra, par exemple, trouver un déterminant orthogonal symétrique à éléments réels, ou encore un déterminant gauche orthogonal, les éléments de la diagonale principale étant réels et les autres purement imaginaires, etc.

Notons, en passant, que les orthogonaux symétriques ne rentrent pas dans les orthogonaux construits au moyen du problème de Cayley.

Nous reporterons plus loin une courte comparaison entre les propriétés principales des déterminants orthogonaux et celles des déterminants dont il est ici question.

7. Nous nous occuperons d'un théorème fondamental pour la suite :

THÉORÈME II. — *La somme des mineurs principaux d'ordre* λ *de* B *est égale à la somme des mineurs principaux d'ordre* λ *de* B'. ($\lambda = 1$, *ou* $2, 3 \ldots n-1$.)

Comme conséquence immédiate, *cette somme est réelle.*

Pour $\lambda = n-1$, on vérifie directement l'égalité

$$\sum_{h=1}^{n} b_{hh} = \sum_{h=1}^{n} b'_{hh}.$$

DÉMONSTRATION. — Pour simplifier l'exposé, nous envisagerons le mineur principal $B_{11,22,\ldots\lambda\lambda}$ de B, obtenu en supprimant les λ premières lignes et les λ premières colonnes. On se rendra aisément compte que cela ne nuit en rien à la généralité du raisonnement.

Écrivons $B_{11,22,\ldots\lambda\lambda}$ comme suit :

$$B_{11,22\ldots\lambda\lambda} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots 0 & 0 & \ldots 0 \\ 0 & 1 & \ldots 0 & 0 & \ldots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots 1 & 0 & \ldots 0 \\ b_{\lambda+1,1} & b_{\lambda+1,2} & \ldots b_{\lambda+1,\lambda} & b_{\lambda+1,\lambda+1} & \ldots b_{\lambda+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots b_{n\lambda} & b_{n,\lambda+1} & \ldots b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Effectuons le produit, lignes par lignes, de $B_{11,22,\ldots\lambda\lambda}$ par D. Après des simplifications du même genre que celles qui ont été indiquées à l'occasion du théorème I, on trouve

$$D \cdot B_{11,22,\ldots\lambda\lambda} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots a_{\lambda 1} & a_{\lambda+11} & \ldots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots a_{\lambda 2} & a_{\lambda+12} & \ldots a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1\lambda} & a_{2\lambda} & \ldots a_{\lambda\lambda} & a_{\lambda+1\lambda} & \ldots a_{n\lambda} \\ a_{\lambda+1,1} & a_{\lambda+1,2} & \ldots a_{\lambda+1,\lambda} & a_{\lambda+1,\lambda+1} & \ldots a_{\lambda+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{n\lambda} & a_{n\lambda+1} & \ldots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant n'est autre chose que D, où l'on a remplacé les λ premières lignes par les λ premières colonnes.

On peut le calculer par application du théorème de Laplace. Le développement se fera en divisant le tableau carré en deux matrices rectangulaires horizontales, l'une d'elles comprenant les λ premières colonnes de D.

Concevons, d'autre part, le développement de D effectué suivant la même règle, mais en divisant le déterminant en deux matrices verticales dont la première est constituée par les λ premières colonnes.

On déduira le premier développement du second par substitution dans ce dernier au complémentaire de chaque mineur d'ordre $n - \lambda$ formé dans la matrice des λ premières colonnes, du déterminant mineur de D que l'on obtiendrait en permutant dans ce complémentaire les indices des lignes et des colonnes.

En se reportant à la première remarque de l'alinéa 5, on voit que cela revient à remplacer ce complémentaire par la quantité imaginaire conjuguée.

A chaque produit de D par un mineur principal de B d'ordre λ, $B_{k_1 k_1, k_2 k_2, \ldots k_\lambda k_\lambda}$, correspondra une expression analogue, si la première matrice servant au développement est constituée des colonnes de D d'indices $k_1, k_2, \ldots k_\lambda$.

Faisons la somme de tous les produits possibles, en nombre C_n^λ. Le résultat est contenu dans l'énoncé qui suit :

Le produit de D *par la somme de tous les mineurs principaux d'ordre* λ *de* D *est égal à la somme des* C_n^λ *développements de* D *obtenus, par la règle de Laplace, après avoir divisé* D *de toutes les façons possibles en deux matrices verticales dont l'une est formée de* λ *colonnes; sauf qu'il faudra remplacer dans chaque terme le complémentaire du mineur d'ordre* $n - \lambda$ *par la quantité imaginaire conjuguée à la valeur de ce complémentaire.*

Ou encore, puisque chaque développement contient C_n^λ termes,

Le produit de D *par la somme des mineurs principaux d'ordre* λ *de* B *est exprimé par la somme des* $(C_n^\lambda)^2$ *mineurs d'ordre* $n - \lambda$ *de* D, *chacun étant multiplié par la quantité imaginaire conjuguée à son complémentaire.*

Ceci dit, la démonstration s'achève facilement.

On procédera avec les mineurs principaux d'ordre λ de B′ comme on a procédé avec ceux de B. Écrivons, par exemple,

$$B'_{11,22,\ldots\lambda\lambda} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \ldots 0 & b'_{1\lambda+1} & \ldots b'_{1n} \\ 0 & 1 \ldots 0 & b'_{2\lambda+1} & \ldots b'_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 \ldots 1 & b'_{\lambda,\lambda+1} & \ldots b'_{\lambda+1\,n} \\ 0 & 0 \ldots 0 & b'_{\lambda+1,\lambda+1} & \ldots b'_{\lambda+1,n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 \ldots 0 & b'_{n,\lambda+1} & \ldots b'_{nn} \end{vmatrix}.$$

Effectuons le produit $D.B'_{11,22,\ldots\lambda\lambda}$, mais colonnes par colonnes. Nous pourrons répéter tout ce qui précède, à condition de permuter les mots ligne et colonne. En dernière analyse, le produit de D par la somme de tous les mineurs principaux d'ordre λ de B′ s'exprimera par la somme des $(C_n^\lambda)^2$ termes qui donnent précisément la valeur du produit de D par la somme des mineurs principaux d'ordre λ de B.

La justification de l'énoncé est ainsi achevée.

Théorème III. — *La somme des mineurs principaux d'ordre* λ *de* B *est égale à la somme des mineurs principaux d'ordre* $n - \lambda$.

Au point de vue de la vérification, cet énoncé n'est qu'un corollaire du théorème précédent. Nous avons jugé bon de le mettre en évidence, étant donnée son importance pour la seconde partie.

En vertu de la troisième remarque de l'alinéa 5, on déduit que la somme des mineurs principaux d'ordre λ de B est égale à la somme des mineurs principaux d'ordre $n - \lambda$ de B′. Il suffit dès lors de faire intervenir la proposition précédente pour se convaincre de l'exactitude du théorème III.

8. *Définition de déterminants de valeur* — 1, *au moyen des* B, B′.

Tout déterminant orthogonal de valeur — 1 provient d'un

déterminant orthogonal de valeur 1 dans lequel on a changé les signes des éléments d'un nombre impair de rangées. Il est évident qu'il n'en existe pas d'autre.

Par analogie, nous définirons des déterminants B_1, B'_1 de valeurs -1, vérifiant toujours les équations (12), en changeant dans B, B′ les signes des éléments d'un nombre impair de rangées de mêmes indices. Alors, B'_1 est le réciproque de B_1 dans lequel on a changé les signes de tous les éléments.

Le procédé ne conserve d'ailleurs pas la généralité dont il jouissait pour les déterminants orthogonaux. Si n est impair, il fournit bien des déterminants satisfaisant au théorème II, en changeant les signes de tous les éléments, mais il n'en est pas de même pour n pair.

Dans la suite, nous confondrons les notations B, B_1 et B′, B'_1; mais lorsqu'une distinction sera nécessaire nous représenterons par μ la valeur commune de B et B′ ($\mu = \pm 1$).

Théorème IV. — *Tout mineur de* B′ *est égal au complémentaire du mineur homologue de* B, *multiplié par* μ.

Pour $\mu = 1$, ce théorème n'est autre chose que la remarque 3 (n° 5).

Si $\mu = -1$, le réciproque B″ de B s'obtient en changeant les signes de tous les éléments de B′. Or, si l'on représente par B''_λ un mineur quelconque d'ordre λ de B″, on a, par une proposition bien connue,

$$B''_\lambda = B^{n-\lambda-1} B_{n-\lambda} = \mu^{n-\lambda-1} B_{n-\lambda},$$

$B_{n-\lambda}$ étant le complémentaire du mineur B_λ dans B.

Revenons de B″ à B′ : tout mineur de degré pair de B″ devient mineur de degré pair de B′ sans subir de modification. Mais on a, dans ce cas,

$$\mu^{n-\lambda-1} = \mu,$$

ce qui est le théorème.

Au contraire, s'il s'agit d'un mineur de degré impair de B″,

il passe dans B′ en changeant de signe. Comme on a alors

$$\mu^{n-1-1} \times (-1) = \mu,$$

le théorème est encore vérifié.

Remarque. — Il est inutile de souligner l'analogie qui existe entre cette proposition et une propriété usuelle des déterminants orthogonaux.

9. Théorème V. — *Aux termes des diagonales principales de* B *et* B′, *ajoutons l'unité. Représentons par* Δ, Δ' *les déterminants ainsi obtenus, par* Δ_k, Δ'_k, *leurs mineurs du premier ordre formés en supprimant la ligne et la colonne qui se croisent sur l'élément* $b_{kk} + 1$, *ou* $b'_{kk} + 1$.

On a les relations

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= \Delta_k + \mu\Delta'_k \\ \Delta' &= \Delta'_k + \mu\Delta_k \end{aligned}\right\}. \qquad (14)$$

Le déterminant Δ est de la forme

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_{11}+1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}+1 & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn}+1 \end{vmatrix},$$

et Δ' donne un tableau semblable.

Or, nous pouvons écrire comme suit le développement de Δ :

$$\Delta = 1^n + 1^{n-1}\sum b_{jj} + 1^{n-2}\sum \delta_2 + \dots + 1\sum \delta_{n-1} + \mu, \qquad (15)$$

en représentant par δ_j un mineur principal de j^2 éléments.

Nous décomposons cette expression en deux parties dont l'une sera le développement de Δ_k. Elle s'obtient en enlevant de (15) tous les mineurs qui renferment un ou plusieurs

éléments dont au moins un indice est k. Nous l'écrivons

$$1 + \sum' b_{jj} + \sum' \delta_2 + \ldots + {}'\delta_{n-1}. \qquad (16)$$

L'autre partie contenant les autres mineurs et le terme μ pourra se représenter par

$$b_{kk} + \sum^{(k)} \delta_2 + \ldots + \sum^{(k)} \delta_{n-1} + \mu. \qquad (17)$$

Appelons δ'_2, δ'_3, ..., les mineurs principaux de B'. On a, en vertu du théorème IV,

$$b_{kk} = \mu \delta'_{n-1}; \quad \sum^{(k)} \delta_j = \mu \sum' \delta'_{n-j}.$$

La lettre (k) indique qu'il s'agit de mineurs principaux renfermant des éléments de rang k; l'accent, au contraire, exclut de tels mineurs.

Tenant compte des formules précédentes dans 17, on ramène cette expression à la forme

$$\mu(1 + \sum' b'_{jj} + \sum' \delta'_2 + \ldots + {}'\delta'_{n-1}) = \mu \Delta'_k. \qquad (17')$$

Il suffit d'ajouter (16) et (17') pour obtenir la première des formules (14). La seconde se démontre de même.

Corollaire. — *Si* $\Delta = 0$, *on a* $\Delta' = 0$.

Parmi les propriétés des mineurs de Δ (et Δ'), résultant de l'hypothèse $\Delta = 0$, citons la suivante qui semble assez intéressante :

Théorème VI. — *Soit* $B = B' = 1$, $\Delta = 0$. *La somme des mineurs principaux du premier ordre de* Δ *est nulle.*

En effet, on déduit, dans cette hypothèse, du théorème précédent ($\mu = 1$)

$$\Delta_k = -\Delta'_k$$

et en sommant ces égalités, écrites pour $k = 1, 2, \ldots n$,

$$\sum \Delta_k = -\sum \Delta'_k. \qquad (18)$$

Exprimons, d'autre part, $\Sigma\Delta_k$, $\Sigma\Delta'_k$, en fonction des éléments de B et de B'.

Pour $\Sigma\Delta_k$ interviendra un même nombre de fois chacun des mineurs principaux d'ordre λ de B.

Pour $\Sigma\Delta'_k$ interviendra un même nombre de fois chacun des mineurs principaux d'ordre λ de B' ; $(\lambda = 1, 2, \ldots n-1)$.

On en conclut, eu égard au théorème II,

$$\sum\Delta_k = \sum\Delta'_k, \tag{19}$$

égalité qui, comparée à (18), exige

$$\sum\Delta_k = \sum\Delta'_k = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

10. Théorème VII. — *Soient* B, C *deux déterminants de valeur* μ, B', C' *leurs réciproques (ou les déterminants définis au n° 8). Soient, d'autre part,* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ *deux séries de* n *quantités.*

Les déterminants

$$K \equiv \begin{vmatrix} \alpha_1 b_{11} + \beta_1 c_{11} & \alpha_2 b_{12} + \beta_2 c_{12} \ldots \alpha_n b_{1n} + \beta_n c_{1n} \\ \alpha_1 b_{21} + \beta_1 c_{21} & \alpha_2 b_{22} + \beta_2 c_{22} \ldots \alpha_n b_{2n} + \beta_n c_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}$$

et

$$K' \equiv \begin{vmatrix} \beta_1 b'_{11} + \alpha_1 c'_{11} & \beta_2 b'_{12} + \alpha_2 c'_{12} \ldots \beta_n b'_{1n} + \alpha_n c'_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}$$

sont égaux (*).

Les déterminants à étudier peuvent se décomposer chacun

(*) Les théorèmes V et VII sont des propriétés de tous les déterminants de valeur ± 1, que nous pouvons représenter en général par $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$. Ils comprennent donc comme cas particuliers des énoncés se rapportant aux déterminants orthogonaux, donnés par Siacci. (*Annali di mat.*, vol. V.)

en 2^n déterminants d'ordre n à éléments monômes. L'un deux sera, pour le premier tableau considéré,

$$\varphi\alpha_{k_1}\alpha_{k_2}\dots\alpha_{k_j}\beta_{s_1}\dots\beta_{s_{n-j}}\begin{vmatrix} b_{1k_1}\dots b_{1k_j}c_{1s_1}\dots c_{1s_{n-}} \\ b_{2k_1}\dots b_{2k_j}c_{2s_1}\dots c_{2s_{n-j}} \\ \dots\dots\dots\dots \end{vmatrix}, \qquad (20)$$

où φ représente ± 1, selon le nombre de transpositions que l'on a dû effectuer pour grouper séparément les colonnes des b_{jk} et celles des c_{rs} et pour supprimer les inversions de seconds indices dans chacun des groupes. On pourra alors appliquer le théorème de Laplace, après division en deux matrices verticales, l'une comprenant les b_{jk}, l'autre les c_{rs}.

Considérons le second déterminant. Parmi les 2^n termes provenant de la décomposition de K′, on trouve

$$\varphi\alpha_{k_1}\dots\alpha_{k_j}\beta_{s_1}\dots\beta_{s_{n-j}}\begin{vmatrix} c'_{1k_1}\dots c'_{1k_j}b'_{1s_1}\dots b'_{1s_{n-j}} \\ c'_{2k_1}\dots c'_{2k_j}b'_{2s_1}\dots b'_{2s_{n-j}} \\ \dots\dots\dots\dots \end{vmatrix}. \qquad (21)$$

On voit aisément que φ a ici la même détermination que plus haut.

Appliquons encore le théorème de Laplace : dans le développement de (21) interviendront précisément tous les complémentaires dans B′ et C′ des mineurs de B et C employés dans (20). L'égalité des expressions (20) et (21) en résulte.

Comme, d'ailleurs, tout terme analogue à (20) a son correspondant analogue à (21), le théorème est démontré.

11. Nous allons faire une courte comparaison de quelques résultats avec les propriétés des déterminants orthogonaux qui s'en rapprochent.

Nous prendrons même la question à un point de vue un peu plus général, en considérant tous les déterminants $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ de

valeur ± 1, $\mathfrak{B}'$ étant le réciproque de $\mathfrak{B}$, ou étant le déterminant $\mathfrak{B}'$ défini à l'alinéa 8.

Les théorèmes IV, V, VII sont valables pour ces déterminants $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$.

Puisque les déterminants orthogonaux répondent à la condition

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}',$$

nous retrouvons, comme cas particulier du théorème V, une proposition de Siacci sur les déterminants orthogonaux, proposition qui s'exprime par l'égalité

$$\Delta = (1 + \mu)\Delta_k,$$

les notations étant celles du n° 9 (*).

On formulera aisément, dans la même hypothèse, une autre proposition de Siacci, qui découle du théorème VII lorsqu'on y fait

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}', \qquad \mathfrak{C} = \mathfrak{C}' \text{ (**)}.$$

De ce dernier énoncé, Siacci déduit une série de corollaires qui se généralisent lorsqu'on envisage les déterminants que nous étudions. Voici les trois principaux, étendus aux déterminants $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$; $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$:

a) *Si l'on a*

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}' = 1, \qquad \mathfrak{C} = \mathfrak{C}' = -1,$$

les déterminants K, K' *(théorème VII) sont égaux en valeur absolue, mais de signes contraires.*

(*) Siacci, *Annali di mat.*, vol. V (d'après E. Pascal : *I Determinanti*, p. 213). Nous n'avons pu consulter l'original.

(**) Id., *ibidem*.

b) *Posons, avec les mêmes hypothèses,*

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = p$$
$$\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = p$$

il en résultera

$$K = K' = 0.$$

c) *Soient* $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ *des déterminants tous de même valeur* (*soit* $+1$, *soit* -1). *Si l'on a pour* n *impair*

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = p,$$
$$\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = -p,$$

il vient encore

$$K = K' = 0.$$

En résumé on voit qu'au moyen du théorème II on peut définir une classe étendue de déterminants de valeur ± 1 qui comprend, comme cas particuliers, les déterminants orthogonaux et les déterminants B, B′. Ces deux cas particuliers se relient par les déterminants orthogonaux symétriques.

En dehors de ce point de contact, ces deux catégories sont bien différenciées. La première renferme les déterminants identiques à leurs réciproques (sauf, peut-être, aux signes près de tous les éléments), tandis que, pour former le réciproque d'un déterminant B (2e catégorie), on doit remplacer chaque élément par le nombre complexe conjugué, puis écrire les lignes pour les colonnes.

12. Pour terminer cette première partie, nous donnerons deux exemples de déterminants B, B′ construits suivant le procédé indiqué :

a) Posons

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1+i & -1+i \\ 1-i & 1 & -1-i \\ -1-i & -1+i & 1 \end{vmatrix} = 9,$$

$$R = \begin{vmatrix} -1 & -1+3i & 1+3i \\ -1-3i & -1 & 1-3i \\ 1-3i & 1+3i & -1 \end{vmatrix};$$

en représentant toujours par D le déterminant dont il a été question au début (n° 1), et par R son réciproque.

Par application des formules (10) et (11), on obtient un déterminant orthogonal symétrique

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix}.$$

Il serait facile de déterminer les conditions que doivent vérifier les parties réelles et imaginaires des éléments de D pour donner un tel déterminant. Nous ne nous y arrêterons pas.

Lorsque les éléments de D deviennent réels, ce déterminant est symétrique. Le déterminant $B = B'$ dégénère alors en un déterminant orthogonal dont les éléments de la diagonale principale seuls sont différents de 0.

b) On obtient un exemple pour $n = 4$, en posant

$$\begin{vmatrix} 2 & 1+i & 2+i & 1-i \\ 1-i & 2 & 1+2i & 1+3i \\ 2-i & 1-2i & 2 & 2-i \\ 1+i & 1-3i & 2+i & 2 \end{vmatrix} = 46 \begin{vmatrix} -6 & -1-9i & 18-12i & -7+9i \\ -1+9i & -6 & 8-6i & -3-11i \\ 18+12i & 8+6i & -32 & 16+10i \\ -7-9i & -3+11i & 16-10i & -14 \end{vmatrix}.$$

Il en résulte

$$B = \begin{vmatrix} \frac{-7+24i}{23} & \frac{5+5i}{23} & \frac{-4-40i}{23} & \frac{1+27i}{23} \\ \frac{3+21i}{23} & \frac{-31+8i}{23} & \frac{18-34i}{23} & \frac{-11-3i}{23} \\ \frac{9+15i}{23} & \frac{2+16i}{23} & \frac{-11-50i}{23} & \frac{-13+27i}{23} \\ \frac{15+15i}{23} & \frac{3+25i}{23} & \frac{-6-38i}{23} & \frac{-29+18i}{23} \end{vmatrix}$$

$$B' = \begin{vmatrix} \frac{-7-24i}{23} & \frac{3-21i}{23} & \frac{9-15i}{23} & \frac{15-15i}{23} \\ \frac{5-5i}{23} & \frac{-31-8i}{23} & \frac{2-16i}{23} & \frac{3-25i}{23} \\ \frac{-4+40i}{23} & \frac{18+34i}{23} & \frac{-11+50i}{23} & \frac{-6+38i}{23} \\ \frac{1-27i}{23} & \frac{-11+3i}{23} & \frac{-13-27i}{23} & \frac{-29-18i}{23} \end{vmatrix}.$$

§ II.

13. Ce paragraphe a pour objet l'étude de l'équation

$$B(x) \equiv \begin{vmatrix} b_{11}-x & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}-x & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn}-x \end{vmatrix} = 0. \qquad (22)$$

Pour donner à la question toute la généralité dont elle est susceptible, nous supposerons que B et B′ sont les déterminants

les plus généraux, tous deux de valeur $+1$ (ou tous deux de valeur -1), satisfaisant aux conditions suivantes :

1° *Les équations de réciprocité*

$$\sum_{k=1}^{n} b_{jk} b'_{jk} = 1, \quad \sum_{k=1}^{n} b_{jk} b'_{hk} = 0, \quad (h, j = 1, 2, \dots n, h \gtrless j)$$

sont vérifiées ;

2° *La somme des mineurs principaux d'ordre* λ *de* B *est égale à la somme des mineurs principaux d'ordre* λ *de* B′ : $(\lambda = 1, 2, \dots n-1)$.

Les déterminants orthogonaux et les déterminants considérés au § I formeront des cas particuliers.

14. Nous pouvons énoncer tout de suite une proposition générale :

Théorème VIII. — *Si* $B = B' = 1$, *l'équation*

$$B(x) = 0$$

est réciproque. Pour n impair, elle admet, au moins, une racine réelle $x = 1$.

Théorème VIII′. — *Si* $B = B' = -1$, *l'équation*

$$B(x) = 0$$

est encore réciproque. Elle admet, pour n impair, au moins une racine réelle, $x = -1$, et, pour n pair, au moins deux racines réelles, $x = +1$, $x = -1$.

Démonstration de la proposition VIII.

L'équation (22) développée prend la forme

$$B(x) \equiv (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} x^{n-1} \sum_{k=1}^{n} b_{kk} + (-1)^{n-2} \lambda^{n-2} \sum \delta_2 +$$

$$+ x^2 \sum \delta_{n-2} + (-1) x \sum \delta_{n-1} + 1 = 0.$$

La notation $\Sigma\delta_h$ représente la somme des mineurs principaux d'ordre $n-h$ de B, c'est-à-dire la somme de tous les mineurs obtenus en prenant h lignes et h colonnes de mêmes indices, de toutes les façons possibles dans B : $(h=1,2,\ldots n-1)$.

Mais, par application du théorème III, il vient

$$\sum b_{kk} = \sum \delta_{n-1}, \quad \sum \delta_2 = \sum \delta_{n-2}, \quad \text{etc.}$$

Par suite, lorsque n est impair, les coefficients de deux termes équidistants des extrêmes (et les coefficients des extrêmes eux-mêmes) sont égaux en valeur absolue et de signes contraires.

D'autre part, si n est pair, les coefficients de deux termes de l'équation, choisis comme ci-dessus, sont égaux et de même signe.

Ce sont bien là des conditions suffisantes pour caractériser, dans les deux cas, une équation réciproque. On en déduit, en outre, que, pour n impair, l'équation $B(x)=0$ est satisfaite pour $x=1$.

Démonstration de la proposition VIII′.

L'équation $B(x)=0$, mise sous forme explicite, s'écrit à présent

$$B(x) \equiv (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} x^{n-1} \sum_k b_{kk} + (-1)^{n-2} x^{n-2} \sum \delta_2 + \ldots$$
$$+ x^2 \sum \delta_{n-2} - x \sum \delta_{n-1} - 1 = 0,$$

avec les mêmes notations que plus haut.

En vertu des hypothèses du n° 13, le théorème IV donne pour $\mu = -1$

$$\sum \delta_{n-1} = -\sum b'_{kk} = -\sum b_{kk},$$
$$\sum \delta_{n-2} = -\sum \delta'_2 = -\sum \delta_2, \quad \text{etc.}, \qquad (23)$$

les éléments accentués étant toujours ceux du déterminant B′.

Cela posé, soit d'abord n impair. Il résulte des formules (23)

que les coefficients de deux termes équidistants des extrêmes et aussi les coefficients des extrêmes ont même valeur absolue et même signe.

On voit donc que, dans ce cas, l'équation

$$B(x) = 0$$

est réciproque et est vérifiée par la valeur $x = -1$.

En second lieu, si n est pair, les coefficients de deux termes définis comme plus haut sont égaux en valeur absolue, mais de signes contraires. Par suite, pour que l'équation considérée soit réciproque, il faut et il suffit qu'elle ne contienne pas de terme de degré $\frac{n}{2}$.

C'est effectivement ce qui a lieu. En effet, d'après le théorème IV, on a

$$\sum_{\frac{n}{2}}^{\prime} = -\sum_{\frac{n}{2}},$$

et par la seconde hypothèse du n° 13,

$$\sum_{\frac{n}{2}}^{\prime} = \sum_{\frac{n}{2}}.$$

Ces relations sont contradictoires, à moins de poser

$$\sum_{\frac{n}{2}} = \sum_{\frac{n}{2}}^{\prime} = 0.$$

D'ailleurs, le polynôme $B(x)$ est maintenant divisible par

$$x^2 - 1,$$

ce qui achève de justifier le théorème en question.

Corollaire. — *Les équations*

$$B(x) = 0, \qquad B'(x) = 0$$

sont identiques.

Nous emploierons cependant, quand l'occasion s'en présentera, les deux notations différentes $B(x)$, $B'(x)$, pour le même polynôme.

15. Avant de pénétrer plus profondément les propriétés de l'équation, objet de ce paragraphe, nous allons introduire quelques considérations relatives au polynôme

$$\varphi(x) \equiv B(x) \cdot B'(-x).$$

Effectuons le produit, lignes par lignes, des déterminants qui représentent $B(x)$ et $B'(-x)$. Il viendra

$$\varphi(x) \equiv \begin{vmatrix} (b_{11}-b'_{11})x+1-x^2 & (b_{12}-b'_{21})x & \dots (b_{1n}-b'_{n1})x \\ (b_{21}-b'_{12})x & (b_{22}-b'_{22})x+1-x^2 & \dots (b_{2n}-b'_{n2})x \\ \dots & \dots & \dots \\ (b_{n1}-b'_{1n})x & (b_{n2}-b'_{2n})x & \dots (b_{nn}-b'_{nn})x+1-x^2 \end{vmatrix};$$

ou, en posant

$$\Phi(x) = \frac{\varphi(x)}{x^n} \text{ (*)},$$

$$\Phi(x) \equiv \begin{vmatrix} b_{11}-b'_{11}+\dfrac{1-x^2}{x} & b_{12}-b'_{21} & \dots b_{1n}-b'_{n1} \\ b_{21}-b'_{12} & b_{22}-b'_{22}+\dfrac{1-x^2}{x} & \dots b_{2n}- \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}-b'_{1n} & b_{n2}-b'_{2n} & \dots b_{nn}-b'_{nn}+\dfrac{1-x^2}{x} \end{vmatrix}. \quad (24)$$

(*) La division du polynôme $\varphi(x)$ par x^n ne peut présenter ici aucun inconvénient. Les seules valeurs de x qui nous intéressent sont celles qui satisfont à l'équation $B(x) = 0$, valeurs comprises parmi les racines de $\varphi(x) = 0$. Or, on voit aisément que ces racines ne peuvent être nulles.

Mais le premier membre de l'identité (24) peut seulement changer de signe avec x (si n est impair); il doit en être de même du second. Posons

$$y = \frac{1 - x^2}{x},$$

et développons suivant les puissances de y. Le polynôme

$$\psi(y) = \Phi(x)$$

ne pourra contenir que des termes en y de même parité. Tenant compte du théorème VIII (ou VIII') on conclut :

THÉORÈME IX. — *A une racine simple ou double* $y = 0$ *près, toutes les racines de l'équation*

$$\psi(y) = 0$$

sont égales deux à deux en valeur absolue, et de signes contraires.

16. Cette proposition permet d'en énoncer immédiatement une autre qui se rapporte au déterminant des différences $b_{jk} - b'_{kj}$:

$$\mathrm{E} = \begin{vmatrix} b_{11} - b'_{11} & b_{12} - b'_{21} \dots b_{1n} - b'_{n1} \\ b_{21} - b'_{12} & b_{22} - b'_{22} \dots b_{2n} - b'_{n2} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_{n1} - b'_{1n} & b_{n2} - b'_{2n} \dots b_{nn} - b'_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (25)$$

En effet, dans le développement de $\psi(y)$ suivant les puissances de y, le coefficient (nul ou non) du terme de degré $n - h$ est précisément la somme des mineurs principaux d'ordre $n - h$ de E. D'ailleurs, si le polynôme $\psi(y)$ est de degré impair, le déterminant E est nul.

Par conséquent,

THÉORÈME X. — *Soient* b_{jk}, b'_{jk} *les éléments des détermi-*

nants B, B′, *définis au n° 13;* E *le déterminant construit au moyen des différences* $b_{jk} - b'_{kj}$; $2\nu + 1$, *un nombre impair quelconque compris entre* 1 *et* n (j, k = 1, 2, ... n).

La somme des mineurs principaux de E *formés en choisissant de toutes les façons possibles* $2\nu + 1$ *lignes et* $2\nu + 1$ *colonnes de mêmes indices est égale à* 0.

En particulier, si n *est impair, le déterminant* E *est lui-même nul.*

Remarque. — Signalons que les déterminants E comprennent, comme cas particulier, les déterminants symétriques gauches.

Si l'on considère spécialement les déterminants B, B′ étudiés dans la première partie, le déterminant E se réduit, sauf un facteur $\pm 2^n i^n$, au déterminant

$$(\pm \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} \dots \varepsilon_{nn}), \qquad (26)$$

formé avec les coefficients des parties imaginaires communes aux éléments de B et B′. Le théorème X s'énonce alors comme suit :

Théorème X′. — *Soient* B, B′ *les déterminants dont les éléments sont définis par les formules* (10) et (11) et soit

$$(\pm \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} \dots \varepsilon_{nn}) \qquad (26)$$

le déterminant des parties imaginaires $i\varepsilon_{jk}$ *de ces éléments* (*à un facteur* i^n *près*).

La somme des mineurs principaux de degré $2\nu + 1$ *de* (26) *est égale à zéro* ($2\nu + 1 = 1$, *ou* 3, 5, ...).

En outre, lorsque n *est impair, on a*

$$E = 0.$$

Si les déterminants B, B′ sont symétriques, E est un déterminant symétrique ; si B est orthogonal, E est symétrique gauche. Donc *si* B *est un déterminant orthogonal symétrique, tous les éléments de* E *sont nuls.*

17. Il nous reste à examiner quelques cas particuliers de l'équation

$$B(x) = 0.$$

Nous supposerons, en premier lieu, que B se réduit à un déterminant orthogonal, et, pour éviter toute confusion, nous représenterons ce déterminant par S.

Le premier théorème que l'on rencontre à ce sujet est un énoncé de Brioschi (*Journ. de Liouville*, vol. XIX, p. 253). Cette proposition s'applique, en fait, à des déterminants orthogonaux de valeur 1, obtenus par un procédé dû à Cayley (*). La voici sous sa forme originale :

L'équation

$$S(x) = 0$$

a, lorsque n *est impair, une racine égale à l'unité et* $n-1$ *racines imaginaires et deux à deux réciproques ; lorsque* n *est pair, les racines sont toutes imaginaires et deux à deux réciproques.*

La démonstration donnée par Brioschi suppose les éléments de S réels; la méthode de Cayley, qui a pour point de départ des déterminants gauches, exclut les orthogonaux symétriques.

On trouve le théorème de Brioschi étendu au cas de $S = -1$ dans *I Determinanti* de M. Pascal (p. 214) :

Si $S = -1$, *l'équation réciproque*

$$S(x) = 0$$

a, pour n *impair, la racine* $x = -1$ *et aucune autre racine réelle ; quand* n *est pair, elle a les racines* $x = 1$, $x = -1$ *et aucune autre racine réelle.*

Encore ici, il est question de déterminants à éléments réels.

Nous obtiendrons cette proposition en combinant, pour le cas particulier des déterminants orthogonaux, les énoncés VIII et VIII′ avec le suivant :

Théorème XI. — *L'équation* $S(x) = 0$ *correspondant à un*

(*) Voir *Journal de Crelle,* vol. XXXII, p. 119, ou encore la note, p. 11.

déterminant orthogonal non symétrique à éléments réels ne peut avoir d'autre racine réelle que les racines ± 1 *données par les théorèmes* VIII *et* VIII'. Ces racines réelles sont d'ailleurs simples.

En effet, le déterminant E (25) est maintenant symétrique gauche; il en est de même de tous ses mineurs principaux. Nous savons déjà que l'équation

$$\psi(y) = 0$$

ne contient que des termes de même parité. D'une propriété des déterminants symétriques gauches, il résulte que tous les termes de cette équation sont positifs.

En dehors de la racine $y = 0$, une telle équation ne peut admettre que des racines imaginaires. Soit $\rho + i\sigma$, $\sigma \neq 0$ une de ces racines. On obtient deux solutions de l'équation proposée, sauf peut-être le signe, en cherchant les valeurs de x qui vérifient l'égalité

$$\frac{1 - x^2}{x} = \rho + i\sigma,$$

valeurs qui sont évidemment imaginaires.

18. Remarques. — I. Si l'équation $\psi(y) = 0$ est de degré impair, on a (théorème X)

$$E = 0,$$

ce qui fournit une racine $y = 0$, c'est-à-dire $x = 1$ ou $x = -1$.

Si l'équation est de degré pair avec $S = -1$, le déterminant E s'annule encore. La racine $y = 0$ est alors double et l'on a $x = \pm 1$. Pour que $y = 0$ soit racine d'ordre supérieur à 2, il faut que le déterminant orthogonal auquel correspond l'équation $S(x) = 0$ possède des lignes et des colonnes de mêmes rangs, identiques.

II. Ce procédé ne fournit aucun renseignement sur la réalité des racines quand certains éléments de S sont imaginaires. Il peut se faire alors, comme nous le verrons, que toutes les racines soient réelles.

19. — Dans ce qui précède, la condition que les déterminants orthogonaux considérés ne soient pas symétriques est essentielle. Pour ces derniers on obtient cette proposition extrêmement simple :

THÉORÈME XII. — *L'équation* $S(x) = 0$ *correspondant à un déterminant orthogonal symétrique* (*à éléments réels ou complexes*) *a toutes ses racines réelles et égales à* ± 1.

La démonstration est immédiate, si l'on se rappelle que dans cette hypothèse tous les éléments du déterminant E sont nuls. Il en résulte que le polynôme $\varphi(x)$ est dans ce cas

$$(1 - x^2)^n.$$

Exemple. — Soit donné le déterminant orthogonal symétrique

$$S = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = 1.$$

On obtient

$$S(x) \equiv (x + 1)^2 (x - 1) = 0.$$

Avec les déterminants orthogonaux symétriques, nous sommes ramenés aux déterminants B, B′ étudiés dans la première partie. Les premiers, en effet (6), sont des cas particuliers des

seconds. Il en est de même pour d'autres déterminants que nous allons examiner.

20. On peut construire un déterminant gauche orthogonal tel que les éléments de la diagonale principale soient réels, les autres étant purement imaginaires. Un orthogonal de cette espèce s'écrit

$$S = \begin{vmatrix} a_{11} & i\varepsilon_{12} & \dots & i\varepsilon_{1n} \\ -i\varepsilon_{12} & a_{22} & \dots & i\varepsilon_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -i\varepsilon_{1n} & -i\varepsilon_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Des éléments isolés, symétriquement placés par rapport à la diagonale principale, peuvent être nuls. Mais, nous supposerons que l'on n'ait point augmenté l'ordre du déterminant en lui adjoignant des lignes et colonnes supplémentaires à éléments tous nuls, exception faite pour ceux de la diagonale principale qui seraient égaux à ± 1.

Nous énoncerons successivement deux propositions dont les démonstrations ne peuvent guère être séparées :

Théorème XIII. — *Soit* S *un déterminant gauche orthogonal dont les éléments de la diagonale principale sont réels et les autres purement imaginaires.*

1° *Tous les éléments de la diagonale principale sont égaux entre eux ;*

2° S *est nécessairement un déterminant d'ordre pair ;*

3° *On a* $S = 1$.

Théorème XIV. — *Toutes les racines de l'équation*

$$S(x) = 0$$

sont réelles. Elles se réduisent à deux racines inverses l'une de l'autre dont l'ordre de multiplicité est $\frac{n}{2}$.

Formons le carré du polynôme

$$S(x) \equiv [\pm (a_{11} - x)(a_{22} - x) \dots (a_{nn} - x)].$$

Il vient, si l'on tient compte de la forme spéciale des éléments

$$S^2(x) \equiv \begin{vmatrix} 1 - 2a_{11}x + x^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 - 2a_{22}x + x^2 \dots & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 - 2a_{nn}x + x^2 \end{vmatrix}.$$

Cette expression montre que les racines de l'équation

$$S(x) = 0$$

sont comprises parmi les valeurs qui vérifient les équations du second degré

$$x^2 - 2a_{kk}x + 1 = 0; \qquad (k = 1, 2, \dots n). \qquad (27)$$

Les racines d'une telle équation sont d'ailleurs réelles si $|a_{kk}| \geqslant 1$. Je dis qu'il en est ainsi pour tous les a_{kk}.

En effet, considérons parmi les équations de réciprocité celles dont le second membre est l'unité. Elles s'écrivent

$$a_{jj}^2 - (\varepsilon_{j1}^2 + \varepsilon_{j2}^2 + \dots + \varepsilon_{jj-1}^2 + \varepsilon_{jj+1}^2 + \dots + \varepsilon_{jn}^2) = 1; \quad (j = 1, 2, \dots n),$$

formules qui exigent $|a_{jj}| > 1$.

Les équations (27) ne peuvent admettre que des racines réelles. En outre, puisque l'on a nécessairement $|a_{kk}| > 1$, il est vérifié qu'aucune de ces racines ne peut être $+1$, ou -1; par suite (théorème VIII'),

$$S = 1.$$

Cela posé, remarquons que les solutions d'une quelconque des équations (27) sont réciproques et ne peuvent être égales entre elles. Mais toute racine de

$$S^2(x) = 0$$

est double et, par conséquent, les équations (27) doivent être deux à deux identiques.

La parité de l'ordre n du déterminant résulte de cette remarque.

Il reste à montrer l'égalité des a_{kk}.

Extrayons des équations de réciprocité les suivantes :

$$\begin{aligned}
&-i\varepsilon_{12}(a_{11} - a_{22}) - (\varepsilon_{13}\varepsilon_{23} + \varepsilon_{14}\varepsilon_{24} + \cdots + \varepsilon_{1n}\varepsilon_{2n}) = 0\\
&-i\varepsilon_{13}(a_{11} - a_{33}) - (\varepsilon_{12}\varepsilon_{32} + \varepsilon_{14}\varepsilon_{34} + \cdots + \varepsilon_{1n}\varepsilon_{3n}) = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&-i\varepsilon_{1n}(a_{11} - a_{nn}) + (\varepsilon_{12}\varepsilon_{2n} + \varepsilon_{13}\varepsilon_{3n} + \cdots + \varepsilon_{1,n-1}\varepsilon_{n-1\,n}) = 0.
\end{aligned}$$

Séparant les parties réelles et imaginaires, on voit qu'il résulte de là

$$a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}.$$

Représentons par a la valeur commune de ces éléments. En tenant compte de ce qui précède, on pourra poser

$$B(x) \equiv (x^2 - 2ax + 1)^{\frac{n}{2}} = 0,$$

équation qui admet les deux racines réelles

$$x_1 = a + \sqrt{a^2 - 1}, \qquad x_2 = a - \sqrt{a^2 - 1},$$

à compter chacune $\frac{n}{2}$ fois.

La justification des énoncés est ainsi complète.

21. Par application du procédé indiqué à l'alinéa 8, nous pouvons obtenir des déterminants orthogonaux de valeur — 1.

Si l'on change, par exemple, les signes des éléments de la première colonne, le déterminant prend la forme remarquable

$$S' = \begin{vmatrix} -a & i\varepsilon_{12} & i\varepsilon_{13} \dots i\varepsilon_{1n} \\ i\varepsilon_{12} & a & i\varepsilon_{23} \dots i\varepsilon_{2n} \\ i\varepsilon_{13} & -i\varepsilon_{23} & a \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ i\varepsilon_{1n} & -i\varepsilon_{2n} & \dots a \end{vmatrix} = -1.$$

On voit que S' se compose d'un déterminant gauche bordé par une ligne et une colonne identiques.

Voici la proposition que l'on peut démontrer :

THÉORÈME XV. — *Toutes les racines de l'équation*

$$S'(x) = 0$$

sont réelles. Deux d'entre elles sont $+1$ *et* -1. *Les autres se réduisent aux deux racines* $\frac{n-2}{2}$ *uples*

$$a + \sqrt{a^2 - 1}, \qquad a - \sqrt{a^2 - 1}.$$

En effet, calculons $S'^2(x)$. On a

$$(x) = \begin{vmatrix} 1 + 2ax + x^2 & 2i\varepsilon_{12}x & 2i\varepsilon_{13}x & \dots & 2i\varepsilon_{1n}x \\ 2i\varepsilon_{12}x & 1 - 2ax + x^2 & 0 & \dots & 0 \\ 2i\varepsilon_{13}x & 0 & 1 - 2ax + x^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2i\varepsilon_{1n}x & 0 & 0 & \dots & 1 - 2ax + x^2 \end{vmatrix}.$$

Développons le déterminant. On obtient

$$S'^2(x) = (1+2ax+x^2)(1-2ax+x^2)^{n-1} + 4\sum_{k=2}^{n} \varepsilon_{1k}^2 x^2 (1-2ax+x^2)^{n-2},$$

ou encore, si l'on tient compte de la condition,

$$a^2 - (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \cdots + \varepsilon_{1n}^2) = 1,$$
$$S'^2(x) = (1 - 2ax + x^2)^{n-2}(x^2 - 1)^2. \qquad (28)$$

Cette formule fournit le théorème.

Exemples. — I. Soit le déterminant orthogonal du deuxième ordre

$$S = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & i \\ -i & \sqrt{2} \end{vmatrix}.$$

L'équation $S(x) = 0$ est ici

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0.$$

Si l'on change les signes des éléments de la première ligne dans S, l'équation deviendra

$$x^2 - 1 = 0.$$

II. — On vérifiera aisément que le déterminant du quatrième ordre

$$S = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{-2i}{\sqrt{3}} \\ \frac{-i}{\sqrt{3}} & \sqrt{3} & \frac{2i}{\sqrt{3}} & \frac{i}{\sqrt{3}} \\ \frac{-i}{\sqrt{3}} & \frac{-2i}{\sqrt{3}} & \sqrt{3} & \frac{-i}{\sqrt{3}} \\ \frac{2i}{\sqrt{3}} & \frac{-i}{\sqrt{3}} & \frac{i}{\sqrt{3}} & \sqrt{3} \end{vmatrix}$$

est orthogonal de valeur 1.

L'équation $S(x) = 0$ s'écrit

$$x^4 - 4\sqrt{3}x^3 + 14x^2 - 4\sqrt{3}x + 1 = 0$$

ou

$$(x^2 - 2x\sqrt{3} + 1)^2 = 0.$$

Les deux racines doubles sont

$$x_1 = \sqrt{3} + \sqrt{2}. \qquad x_2 = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

Nous changeons les signes de tous les éléments de la première colonne de S; de sorte que l'équation $S'(x) = 0$ a la forme

$$x^4 - 2x^3\sqrt{3} + 2x\sqrt{3} - 1 = 0,$$

c'est-à-dire

$$(x^2 - 1)(x^2 - 2x\sqrt{3} + 1) = 0.$$

Remarque. — Nous avons supposé que l'on n'augmentait pas (n° 20) l'ordre du déterminant considéré ci-dessus. Il est évident que le procédé introduirait seulement des racines $x = \pm 1$.

22. — Nous avons tenté l'examen d'un dernier cas : c'est celui d'un déterminant orthogonal à éléments réels sur la diagonale principale, les autres éléments étant tels que b_{jk} et b_{kj} soient des quantités imaginaires conjuguées : ($j, k = 1, 2, \ldots n$; $j \neq k$).

Le polynôme $S(x) \cdot S(-x)$ a maintenant ses coefficients déterminés au moyen d'un déterminant gauche, dont nous n'avons pu rien conclure quant à la réalité des racines.

En formant le déterminant $S^2(x)$, on peut aller un peu plus loin. Ce carré est symétrique et à éléments réels. Comme il n'y

a pas de racine $x = 0$, nous pouvons diviser le polynôme par $(2x)^n$. Il dépend alors de l'expression $\frac{1+x^2}{2x}$, et en posant

$$z = \frac{1+x^2}{2x},$$

nous sommes ramenés à une équation en z :

$$R(z) = 0,$$

qui a toutes ses racines réelles, d'après une propriété connue des déterminants symétriques.

Écartons les racines éventuelles, $x = \pm 1$, quand elles existent par les théorèmes VIII et VIII'. Toutes les valeurs x sont fournies par des équations du second degré

$$x^2 - 2xz + 1 = 0.$$

Chaque valeur de z, telle que l'on ait $|z| > 1$, fournira deux valeurs réelles de x.

23. — Nous croyons qu'il n'est guère possible de rencontrer, en se basant seulement sur la théorie des déterminants, d'autres classes de déterminants orthogonaux qui permettraient d'énoncer de nouvelles propositions sur l'équation

$$S(x) = 0$$

ayant un caractère quelque peu général. L'introduction d'éléments complexes augmente beaucoup l'arbitraire de la question, et il semble qu'il faille, en général, se contenter des théorèmes VIII et VIII'.

Nous verrons, en note (p. 38), que l'on peut donner un procédé général de formation applicable à tous les orthogonaux. C'est l'étude de cette méthode qui pourrait apporter de nouveaux renseignements.

24. — Il nous reste à démontrer un théorème qui concerne les déterminants B, B′ de valeur 1, étudiés dans la première partie.

THÉORÈME XVI. — I. *Si tous les éléments de* B, B′ *sont réels, l'équation*

$$B(x) = 0$$

a toutes ses racines réelles et égales à ± 1.

II. *Si les déterminants* B, B′ *sont symétriques, toutes les racines de l'équation considérée sont imaginaires, abstraction faite d'une solution,* $x = 1$, *donnée éventuellement par le théorème* VIII.

Nous supposons, comme plus haut, que l'on n'ait pas augmenté artificiellement l'ordre des déterminants considérés.

La première partie du théorème est presque évidente. Car, si l'on écrit le polynôme (24) en introduisant l'hypothèse

$$b_{jk} = b'_{kj}, \qquad (j, k = 1, 2, \dots n),$$

il se réduit à

$$(x^2 - 1)^n.$$

La seconde partie de l'énoncé implique les conditions

$$b_{jk} = b_{kj}, \qquad b'_{jk} = b'_{kj}.$$

On a d'ailleurs vu, au § 1er, que l'on a

$$b_{jk} = \gamma_{jk} + i\varepsilon_{jk} \qquad b'_{kj} = \gamma_{jk} - i\varepsilon_{jk}; \qquad (k, j = 1, 2, \dots n).$$

Ces relations portées dans (24) donnent, après division par $(2i)^n x^n$,

$$\frac{\varphi(x)}{(2ix)^n} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} + \dfrac{1-x^2}{2ix} & \cdots & \varepsilon_{12} & \cdots & \varepsilon_{1n} \\ \varepsilon_{12} & \cdots & \varepsilon_{22} + \dfrac{1-x^2}{2ix} & \cdots & \varepsilon_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varepsilon_{1n} & \cdots & \varepsilon_{2n} & \cdots & \varepsilon_{nn} + \dfrac{1-x^2}{2ix} \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant est symétrique. Nous poserons

$$y = \frac{1 - x^2}{2ix} \qquad (29)$$

et nous développerons le polynôme suivant les puissances de y. A cause d'une propriété déjà rappelée des déterminants symétriques à éléments réels, l'équation

$$\psi(y) = 0$$

n'aura que des solutions réelles.

Si n est impair, l'une des racines sera $y = 0$; elle rendra la solution $x = 1$ du théorème VIII. Cette racine est simple (*).

A présent, soit $y = p$, une des racines autre que $y = 0$. En substituant cette valeur dans (29), on obtient une équation du second degré

$$x^2 + 2pix - 1 = 0,$$

qui fournit deux solutions réciproques appartenant toutes deux à l'équation $B(x) = 0$, ou à $B(-x) = 0$. Comme p est réel, il est visible que ces valeurs de x ne peuvent être qu'imaginaires. Cela achève la démonstration du théorème.

25. Si l'on fait sur les éléments des déterminants B, B′, qui viennent d'être considérés, les seules hypothèses impliquées par leur construction, l'étude de l'équation

$$B(x) = 0$$

paraît assez compliquée.

(*) Les conditions qui définissent, dans le cas considéré, les éléments de B et de B′ excluent, en général, la possibilité d'une racine $y = 0$, double ou triple. Si ce cas peut se présenter, il sera tout à fait exceptionnel.

Bien que les expériences que nous avons faites nous aient fourni quelques indications sur les racines réelles de $B(x) = 0$, nous ne possédons pas de données suffisantes pour pouvoir énoncer un résultat général (*).

On pourra encore former l'équation

$$\psi(y) = 0,$$

et en posant

$$y = iZ,$$

l'écrire

$$\chi(Z) = 0.$$

Les valeurs réelles de Z satisfaisant à cette dernière équation sont les seules qui fournissent des valeurs réelles pour x.

A fortiori, dans le cas le plus général de l'existence des propositions VIII et VIII', le problème reste presque complètement sans solution. Mais il est hors de doute que des circonstances très diverses peuvent se présenter et que les conclusions ne peuvent être formulées que pour des classes particulières.

Au reste, le problème ainsi posé embrasse toutes les équations réciproques. La relation

$$\psi(y) = 0$$

n'est autre chose que la résolvante donnée par la théorie des équations.

Application.

26. Comme application de la théorie précédente, nous allons considérer une classe toute spéciale de déterminants

---

(*) La racine $x = 1$, provenant du théorème VIII, subsiste toujours quand n est impair.

orthogonaux symétriques à éléments réels. Ils dérivent aisément des déterminants inversement orthogonaux de valeurs maxima formés d'éléments égaux à 1 et à — 1 convenablement combinés. Les déterminants inversement orthogonaux ont d'abord été étudiés par Sylvester (*Phil. mag.*, t. XXXIV, 1867, p. 461) ; ils ont été ensuite repris par M. Hadamard (*Bull. des sciences mathématiques*, 1893).

Il convient d'établir d'abord une propriété des mineurs diagonaux (principaux) de degrés impairs appartenant à certains déterminants formés d'après le théorème suivant de Kronecker (J. de Crelle, vol. LXXII, p. 152) :

Représentons par α_{hk} *les éléments d'un déterminant* δ *d'ordre* N, *par* a_{rs} *les éléments d'un déterminant* Δ *d'ordre* n.

Si l'on forme tous les produits possibles $\alpha_{hk}.a_{rs}$, *qui sont en nombre* n^2N^2, *on pourra les disposer en tableau carré en plaçant dans une même ligne les* n.N *produits correspondant aux indices constants* h *et* r ; *et dans une même colonne ceux des produits pour lesquels les indices* k, s *sont constants.*

Le déterminant obtenu par ce procédé a pour valeur

$$\delta^n . \Delta^N.$$

Faisons $N = 2$ et posons

$$\delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix};$$

nous aurons

$$H = \delta^n \Delta^2 = \begin{vmatrix} a_{11}\alpha_1 & a_{12}\alpha_1 \dots a_{1n}\alpha_1 & a_{11}\alpha_2 & a_{12}\alpha_2 \dots a_{1n}\alpha_2 \\ a_{21}\alpha_1 & a_{22}\alpha_1 \dots a_{2n}\alpha_1 & a_{21}\alpha_2 & a_{22}\alpha_2 \dots a_{2n}\alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\alpha_1 & a_{n2}\alpha_1 \dots a_{nn}\alpha_1 & a_{n1}\alpha_2 & a_{n2}\alpha_2 \dots a_{nn}\alpha_2 \\ a_{11}\beta_1 & a_{12}\beta_1 \dots a_{1n}\beta_1 & a_{11}\beta_2 & a_{12}\beta_2 \dots a_{1n}\beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\beta_1 & a_{n2}\beta_1 \dots a_{nn}\beta_1 & a_{n1}\beta_2 & a_{n2}\beta_2 \dots a_{nn}\beta_2 \end{vmatrix} \quad (30)$$

Pour faciliter l'exposé qui suivra, nous écrirons schématiquement

$$H \sim \left| \begin{matrix} (A) & (B) \\ (C) & (D) \end{matrix} \right|$$

Ces préliminaires posés, voici la proposition que nous avons en vue :

THÉORÈME XVII. — *Soit* H *un déterminant satisfaisant aux conditions du théorème de Kronecker, construit au moyen d'un déterminant du deuxième ordre :*

$$\delta = (\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)$$

et d'un déterminant Δ *d'ordre* N.

Soit, d'autre part, $2\nu + 1$ *un nombre impair quelconque de la suite*

$$1, 3, \ldots 2n - 1 :$$

La somme des mineurs diagonaux (principaux) de H *de degré* $2\nu + 1$ *(formés en choisissant de toutes les manières possibles* $2\nu + 1$ *lignes et* $2\nu + 1$ *colonnes de mêmes indices dans* H*) contient en facteur le binôme*

$$\alpha_1 + \beta_2.$$

DÉMONSTRATION. — Deux cas peuvent se présenter :

1° Si l'on a $2\nu + 1 \gtrless n$, certains mineurs diagonaux d'ordre $2n - 2\nu - 1$ de H sont prélevés entièrement soit dans (A), soit dans (D). Pour ceux-là, on pourra mettre soit $\alpha_1^{2\nu+1}$, soit $\beta_2^{2\nu+1}$ en évidence.

Le déterminant H ne change pas lorsqu'on intervertit à la fois α_1 et β_2, α_2 et β_1 (cela donne un nombre pair d'inversions) ; tout mineur de degré $2\nu + 1$, choisi entièrement dans (A), a pour homologue dans (D) un mineur de même degré, qui lui deviendrait identique si l'on remplaçait β_2 par α_1.

Par conséquent, la somme de tous ces mineurs pourra s'écrire

$$(\alpha_1^{2\nu+1} + \beta_2^{2\nu+1})\,\mathrm{M}, \tag{31}$$

où M représente la somme des mineurs principaux d'ordre $n - 2\nu - 1$ de Δ. Plus particulièrement, la somme des éléments de la diagonale principale de H est

$$(\alpha_1 + \beta_2) \sum_{n}^{j=1} a_{jj}. \tag{32}$$

2° En dehors du cas précédent, un mineur de H diagonal et de degré $2\nu + 1$ emprunte ρ lignes et ρ colonnes au schéma (A) et σ lignes et σ colonnes au schéma (D) (*). Les nombres ρ et σ sont de parités différentes, car on doit toujours avoir

$$\rho + \sigma = 2\nu + 1.$$

Pour fixer les idées, supposons qu'il s'agisse des lignes et colonnes de rangs

$$h_1, h_2, \ldots h_\rho \qquad \text{et} \qquad k_1, k_2, \ldots k_\sigma,$$

les h_j étant inférieurs à n, sauf peut-être l'un d'eux qui serait précisément n; et les k_j, tous supérieurs à n.

Ce mineur pourra être développé par la règle de Laplace, en le divisant en deux matrices horizontales comprenant respectivement ρ lignes et σ lignes.

L'expression de ce développement sera

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1^{\rho}\beta_2^{\sigma} l_{\rho\sigma} + \alpha_1^{\rho-1}\beta_2^{\sigma-1}\alpha_2\beta_1 l_{\rho-1,\sigma-1} \\ &\quad + \alpha_1^{\rho-2}\beta_2^{\sigma-2}\alpha_2^2\beta_1^2 l_{\rho-2,\sigma-2} + \cdots + \alpha_1\beta_2^{\sigma-\rho+1}\alpha_2^{\rho-1}\beta_1^{\rho-1} l_{1,\sigma-\rho+1} \\ &\quad + \beta_2^{\sigma-\rho}\alpha_2^{\rho}\beta_1^{\rho} l_{0,\sigma-\rho} \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

si l'on suppose $\sigma > \rho$.

(*) Plus exactement, le mineur en question est formé par le croisement de $2\nu+1$ lignes et $2\nu+1$ colonnes de mêmes indices, ρ de ces indices étant inférieurs à n, et σ d'entre eux supérieurs à n.

On finirait, au contraire, par un terme en $\alpha_1^{\rho-\sigma}$, si ρ était supérieur à σ.

Quant à la signification des coefficients $l_{\rho-x,\sigma-y}$, elle est très simple : ceux-ci sont composés de sommes de produits de mineurs de Δ respectivement d'ordres $n-\rho$ et $n-\sigma$.

A côté de ce mineur, considérons celui qui est formé au moyen des lignes d'indices $k_1 - n$, $k_2 - n$, ... $k_\sigma - n$, $h_1 + n$, $h_2 + n$, ... $h_\rho + n$ et des colonnes de mêmes indices.

On peut voir facilement qu'il diffère du mineur qui précède par le changement de α_1 en β_2, α_2 en β_1 et réciproquement. Cela résulte du fait que ces deux tableaux occupent exactement la même position dans les schémas respectifs

$$\left|\begin{matrix}(A) & (B)\\ (C) & (D)\end{matrix}\right|, \qquad \left|\begin{matrix}(D) & (C)\\ (B) & (A)\end{matrix}\right|,$$

qui se déduisent l'un de l'autre en permutant les lettres α_1, β_2 et α_2, β_1.

Par suite, le développement de ce nouveau mineur se déduira de (33) par simple permutation de α_1 avec β_2, puisque α_2 et β_1 entrent en produit dans chaque terme avec le même exposant.

En réunissant le polynôme (33) avec celui qui vient d'être défini, on aura pour la somme de ces deux mineurs une expression de la forme

$$\left.\begin{aligned}&(\beta_2^\sigma\alpha_1^\rho + \beta_2^\rho\alpha_1^\sigma)\, l_{\rho\sigma} + (\alpha_1^{\rho-1}\beta_2^{\sigma-1} + \alpha_1^{\sigma-1}\beta_2^{\rho-1})\,.\,\alpha_2\,.\,\beta_1 l_{\rho-1,\sigma-1} + \cdots\\ &\quad + (\alpha_1\beta_2^{\sigma-\rho+1} + \beta_2\alpha_1^{\sigma-\rho+1})\,\alpha_2^{\rho-1}\beta_1^{\rho-1} l_{1,\sigma-\rho+1}\\ &\quad + (\beta_2^{\sigma-\rho} + \alpha_1^{\sigma-\rho})\,\alpha_2^\rho\beta_1^\rho l_{0,\sigma-\rho}.\end{aligned}\right\} (34)$$

Mettons en évidence dans les termes successifs $(\alpha_1\beta_2)^\rho$, $(\alpha_1\beta_2)^{\rho-1}$, ... $(\alpha_1\beta_2)$, 1; il restera une parenthèse commune à tous les termes :

$$\beta_2^{\sigma-\rho} + \alpha_1^{\sigma-\rho},$$

$\sigma - \rho$ étant un nombre impair, puisque σ et ρ sont de parités différentes. On suppose toujours $\sigma > \rho$.

La somme (34) se résume dans l'expression (35)

$$(\beta_2^{\sigma-\rho} + \alpha_1^{\sigma-\rho})\, P_{\sigma-\rho}, \qquad (35)$$

où $P_{\sigma-\rho}$ représente une expression algébrique dont les termes sont formés de produits de puissances de α_1, β_2, α_2, β_1, multipliés par des sommes de produits de mineurs de degrés ρ et σ de Δ.

On pourra, à présent, faire prendre à σ et ρ toutes les valeurs possibles inférieures à $2\nu + 1$, en les associant deux à deux de manière que leur somme demeure $2\nu + 1$, ce qui exige notamment qu'ils soient de parités contraires.

A chaque combinaison de ρ et de σ, telle que l'on ait

$$\rho + \sigma = 2\nu + 1,$$

correspondront deux mineurs diagonaux dont la somme se représentera par une formule analogue à (35).

En réunissant toutes les expressions semblables à (35) et en y ajoutant éventuellement l'expression (31), on pourra représenter la somme de tous les mineurs diagonaux de Δ, de degré $2\nu+1$, par l'expression polynomiale suivante :

$$(\alpha_1^{2\nu+1} + \beta_2^{2\nu+1})\, M + \sum{}' (\alpha_1^{\sigma-\rho} + \beta_2^{\sigma-\rho})\, P_{\sigma-\rho} \qquad (36)$$

où tous les exposants $2\nu+1$ et $\sigma-\rho$ sont impairs. Il peut d'ailleurs se faire que le premier terme n'existe pas. Cela aura lieu chaque fois que $2\nu+1$ sera supérieur à n. Quant au symbole Σ, nous l'avons affecté d'un accent pour rappeler qu'il ne se rapporte qu'aux valeurs de ρ et de σ dont la somme est $2\nu+1$, les valeurs $\rho=0$, $\sigma=2\nu+1$; $\rho=2\nu+1$, $\sigma=0$ étant exclues.

L'expression (36) démontre le théorème annoncé. En effet, tous les binômes

$$\alpha_1^{\sigma-\rho} + \beta_2^{\sigma-\rho}$$

étant des sommes de puissances impaires semblables de α_1 et β_2, ils contiennent $\alpha_1 + \beta_2$ en facteur.

27. Revenons à la question proposée. Sylvester a montré (*loc. cit.*) que pour tout ordre pair qui est une puissance de 2,

$$n = 2^\nu,$$

il existe un déterminant à éléments réels $+1$ et -1, qui a une valeur plus grande que tout déterminant de même ordre formé avec une autre combinaison d'éléments $+1$ et -1. Ce déterminant, qu'il appelle inversement orthogonal, est égal à

$$(2^\nu)^{2^{\nu-1}}.$$

Du déterminant d'ordre n, de valeur maximum, on déduit immédiatement un déterminant orthogonal de valeur $+1$, en remplaçant chaque élément 1 par $\frac{1}{+\sqrt{2^\nu}}$, et chaque élément -1 par $\frac{-1}{\sqrt{2^\nu}}$,
le radical étant pris positivement.

On peut construire ces déterminants orthogonaux de proche en proche, comme l'indique Sylvester pour les déterminants de valeur maximum, par des applications successives du théorème de Kronecker, au déterminant de deuxième ordre :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}. \qquad (37)$$

Tous ces orthogonaux seront d'ailleurs symétriques.

On a, par exemple, pour $N = 8 = 2^3$:

$$S = \begin{vmatrix}
\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\
\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\
\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\
\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\
\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\
\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\
\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\
\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}}
\end{vmatrix}.$$

En général, la méthode de construction indiquée revient à dire que si l'on a formé le déterminant analogue à S d'ordre $2^{\nu-1}$, on obtiendra le déterminant d'ordre 2 , en appliquant le théorème de Kronecker au précédent, accompagné du déterminant de deuxième ordre (37).

Mais on a ici

$$\alpha_1 + \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.$$

Par suite, en vertu du théorème XVII, la somme de tous les mineurs diagonaux d'un ordre impair quelconque est égale à 0.

Cela posé, l'équation

$$S(x) = 0$$

ne contiendra que des termes de degrés pairs. D'autre part, puisque S est un déterminant orthogonal symétrique, cette équation a toutes ses racines réelles et égales à $+1$ ou -1. (Théorème XII.)

Donc elle se réduit à

$$S(x) \equiv (x^2 - 1)^{2^{\nu-1}} = 0.$$

NOTE.

28. Pour répondre à la question suivante qui se pose inévitablement au début du § II :

Comment peut-on obtenir un déterminant qui, avec son réciproque, satisfasse aux conditions du théorème III (n° 6) et qui puisse être considéré comme déterminant le plus général de cette espèce? nous nous baserons sur le théorème suivant :

Théorème XVIII. — 1° *Soient*

$$D = (\pm a_{11}a_{22} \dots a_{nn})$$

un déterminant d'ordre n *dont les éléments ont été choisis de façon arbitraire;*

$$R = (\pm A_{11}A_{22} \dots A_{nn})$$

le déterminant réciproque de D.

2° *Posons*

$$\beta_{jk} = a_{jk} - a_{kj}, \qquad (j, k = 1, 2, \dots n).$$

On a évidemment

$$\beta_{kk} = 0; \qquad (k = 1, 2 \dots n).$$

3° *Définissons* n^2 *nombres* b_{hh}, b_{jh}, $(h, j = 1, 2, \dots n)$ *par les formules*

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} b_{hh} = 1 + \dfrac{1}{D}[\beta_{h1}A_{1h} + \beta_{h2}A_{2h} + \cdots + \beta_{hh-1}A_{h-1h} + \beta_{hh+1}A_{h+1h} + \cdots + \beta_{hn}A_{nh}] \\ b_{hj} = \dfrac{1}{D}[\beta_{h1}A_{1j} + \beta_{h2}A_{2j} + \cdots + \beta_{hh-1}A_{h-1j} + \beta_{hh+1}A_{h+1j} + \cdots + \beta_{hn}A_{nj}]. \end{cases}$$

Si nous disposons ces nombres en un tableau carré en plaçant sur une même ligne tous les éléments qui ont même premier indice et sur une même colonne les éléments qui ont même second indice, nous obtiendrons un déterminant B *satisfaisant aux conditions suivantes :*

1° *la valeur de* B *est* 1 ;

2° *les éléments du déterminant* B′, *réciproque de* B, *sont définis par les relations*

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} b'_{hh} = 1 - \dfrac{1}{D}[\beta_{h1}A_{h1} + \beta_{h2}A_{h2} + \cdots + \beta_{hh-1}A_{hh-1} + \beta_{hh+1}A_{hh+1} + \cdots + \beta_{hn}A_{hn}]; \\ b'_{jh} = -\dfrac{1}{D}[\beta_{h1}A_{j1} + \beta_{h2}A_{j2} + \cdots + \beta_{hh-1}A_{jh-1} + \beta_{hh+1}A_{jh+1} + \cdots + \beta_{hn}A_{jn}]; \end{cases}$$

3° *la somme des mineurs principaux d'ordre* λ *de* B *est égale à la somme des mineurs principaux d'ordre* λ *de* B′ $(\lambda = 1$, ou 2, 3, … n − 1).

La démonstration de ce théorème se fait en répétant les raisonnements indiqués aux nos 2 et 6.

Donnons un exemple dans lequel tous les éléments des déterminants sont réels.

En posant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -93 \qquad R = \begin{vmatrix} 7 & 10 & -26 \\ -1 & -28 & 17 \\ -17 & -11 & 10 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} \frac{81}{93} & \frac{129}{93} & -\frac{75}{93} \\ \frac{35}{93} & \frac{143}{93} & -\frac{130}{93} \\ -\frac{7}{93} & -\frac{10}{93} & \frac{119}{93} \end{vmatrix} = 1 \qquad B' = \begin{vmatrix} \frac{169}{93} & -\frac{35}{93} & \frac{7}{93} \\ -\frac{157}{93} & \frac{98}{93} & -\frac{1}{93} \\ -\frac{65}{93} & \frac{85}{93} & \frac{76}{93} \end{vmatrix} = 1.$$

29. La réciproque du théorème XVIII peut s'énoncer comme suit :

Théorème XIX. — *Soient donnés deux déterminants* B, B′ *d'ordre* n *qui satisfont aux trois parties de la conclusion du théorème XVIII; on peut les considérer comme provenant, par application de la méthode du* § *I*er, *d'un certain déterminant* D *d'ordre* n *dépendant, en général, de*

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

quantités arbitraires.

En effet, puisque B et B′ sont donnés, on peut écrire par hypothèse :

1° Les $2n^2$ équations (I) et (II) ;

2° Les conditions de réciprocité :

$$\text{(III)} \qquad \sum_{k=1}^{n} b_{jk} b'_{jk} = 1 ; \qquad \sum_{k=1}^{n} b_{jk} b_{hk} = 0 ; \quad (j, h = 1, 2 \dots n) ;$$

3° Les n égalités exprimant la troisième partie de la conclusion du théorème XVIII.

Mais on voit aisément que ces

$$n(3n+1)$$

équations entre les β_{jk} et les $\frac{A_{jk}}{D}$ (*) se réduisent à n^2 d'entre elles, pour lesquelles nous pourrons prendre les formules (I).

D'autre part, les inconnues sont en nombre

$$n^2 + \frac{n(n-1)}{2};$$

n^2 inconnues $\frac{A_{jk}}{D}$, $\frac{n(n-1)}{2}$ inconnues β_{jk}.

Remarques. — I. Les équations I sont bilinéaires. On se donnera, par exemple, les valeurs des β_{jk} et il restera n^2 équations entre les inconnues $\frac{A_{jk}}{D}$.

Il faut d'ailleurs choisir les β_{jk} de manière que le déterminant formé avec les coefficients des inconnues ne soit pas identiquement nul.

II. Si $B \equiv B'$ est un déterminant orthogonal (de valeur $+1$), le théorème précédent revient à dire que les n^2 équations de réciprocité (III) se réduisent à

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

d'entre elles.

C'est ce fait bien connu qui a été l'origine du problème suivant, résolu par Cayley (*loc. cit.*), et dont nous avons parlé déjà :

Construire un déterminant orthogonal d'ordre n, en partant d'un déterminant gauche de même ordre dont tous les éléments de la diagonale principale sont égaux entre eux.

(*) Il faut toujours supposer $D \neq 0$.

30. On peut envisager une généralisation de ce qui précède : *Construire les déterminants* $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ *qui répondent aux conditions suivantes :*

1° *On a*

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}'.$$

2° *Les équations de réciprocité sont remplacées par celles-ci :*

$$\sum b_{hk} b'_{hk} = \mathrm{L}, \quad \sum_k b_{hk} b'_{jk} = 0; \quad (j, h = 1, 2, \dots n).$$

L *est un nombre quelconque ; le symbole* 0 *est évidemment exclu.*

3° *La somme des mineurs principaux d'ordre* λ *de* $\mathcal{B}$ *est égale à la somme des mineurs principaux d'ordre* λ *de* $\mathcal{B}'$.

On peut énoncer le théorème suivant :

Théorème XX. — *Tous les déterminants* $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ *se déduisent des déterminants* B, B′ *en multipliant tous les éléments de ceux-ci par un même facteur convenable.*

Pour ce cas, le théorème III se modifie. Il est exprimé par la relation

$$\sum \delta_\nu = \mathrm{L}^{\frac{n-2\nu}{n}} \sum \delta_{n-\nu}$$

31. Il resterait à construire les déterminants de valeur — 1 satisfaisant aux conditions du théorème II. Pour les déterminants d'ordre impair, on pourra utiliser le procédé indiqué au n° 8.

Pour résoudre le problème lorsqu'il s'agit de déterminants d'ordre pair, il conviendra de former les déterminants satisfaisant aux égalités

$$\sum_k b_{jk} b'_{jk} = -1, \quad \sum_k b_{jk} b_{hk} = 0$$

et d'employer pour multiplicateur de tous les termes $e^{\frac{i\pi}{2}}$ ou $e^{\frac{i\pi}{n}}$, suivant que l'ordre n'est pas ou est multiple de 4.

SUR

LES FONCTIONS IMPLICITES

PAR

VICTOR LECLERCQ

Docteur en sciences physiques et mathématiques.

La Commission du Patrimoine universitaire liégeois a pris à sa charge les frais d'impression de ce mémoire.

SUR

LES FONCTIONS IMPLICITES(*)

INTRODUCTION.

1. Considérons n fonctions des variables $y_1 \dots y_n\ x_1 \dots x_s$:

$$F_i(y_1 \dots y_n\ x_1 \dots x_s) \quad (i = 1, 2 \dots n) \tag{1}$$

qui sont holomorphes et s'annulent pour le système de valeurs $y_1 = \dots = y_n = x_1 = \dots = x_s = 0$, que nous appellerons, pour abréger, point zéro, ou point (0).

Si le déterminant fonctionnel

$$J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \tag{2}$$

ne s'annule pas au point (0), d'après le théorème des fonctions implicites, les équations

$$F_i = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n) \tag{3}$$

(*) Le présent mémoire a fait partie de la dissertation de doctorat présentée à l'Université de Liége en juillet 1914, par Victor Leclercq. Le jeune Docteur poursuivait de nouvelles recherches sur son sujet d'études, quand le 12 octobre 1914, la mort vint anéantir les plus légitimes espérances. (Note de J. Deruyts.)

admettent dans le domaine de (0) un et un seul système de solutions

$$y_i = \varphi_i(x_1 \dots x_s) \quad (i = 1, 2 \dots n), \tag{4}$$

les φ_i étant holomorphes en $x_1 = \dots = x_s = 0$.

On peut donc dire que le théorème des fonctions implicites ramène un système d'équations holomorphes quelconques (3) à un système d'équations (4) algébriques (*) du premier degré en $y_1 \dots y_n$ et à coefficients holomorphes en $x_1 \dots x_s$, pourvu que l'on ait $(J_1)_0 \neq 0$.

Mais si l'on a $(J_1)_0 = 0$, on ne peut plus rien conclure relativement aux solutions de (3) dans le domaine de (0).

On peut se demander cependant si, au moins en général, on ne pourrait pas alors ramener le système (3) à un système d'équations algébriques en $y_1 \dots y_n$ à coefficients holomorphes en $x_1 \dots x_s$, les degrés de ces équations algébriques étant convenables.

2. Il en est bien ainsi lorsque le système (3) se réduit à une seule équation

$$F(y\, x_1 \dots x_s) = 0, \tag{5}$$

comme le prouve le célèbre « lemme de Weierstrass ».

On a maintenant

$$(J_1)_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0,$$

et si l'on suppose en outre

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_0 = 0 \cdots \left(\frac{\partial^{p-1} F}{\partial y^{p-1}}\right)_0 = 0, \qquad \text{mais} \left(\frac{\partial^p F}{\partial y^p}\right)_0 \neq 0,$$

il sera équivalent, d'après ce lemme, de considérer, au lieu de

---

(*) Dans ce qui suit, nous dirons souvent « équation algébrique », au lieu d' « équation rationnelle entière ».

l'équation (5), dans le domaine de (0), une équation rationnelle entière de degré p :

$$y^p + a_1 y^{p-1} + \cdots + a_p = 0, \qquad (6)$$

les coefficients $a_1 \ldots a_p$ étant des fonctions de $x_1 \ldots x_s$ seulement, holomorphes et s'annulant en $x_1 = \ldots = x_s = 0$.

Comme nous allons l'indiquer, ce lemme peut fournir, mais de manière bien peu satisfaisante, la réduction du système (3) à un système algébrique en $y_1 \ldots y_n$.

Considérons, en effet, chaque équation $F_j = 0$ $(j = 1, 2 \ldots n)$ du système (3) comme une équation en y_1. D'après ce qui vient d'être dit, elle sera, en général, équivalente dans le domaine de zéro à une équation

$$f_j = 0 \quad (j = 1, 2 \ldots n) \qquad (7)$$

rationnelle entière d'un certain degré p_j en y_1 et à coefficients holomorphes en $y_2 \ldots y_n\, x_1 \ldots x_s$ s'annulant au point zéro (*).

Pour un système de solutions $y_1 = \zeta_1 \ldots y_n = \zeta_n\ x_1 = \varepsilon_1 \ldots x_s = \varepsilon_s$ de (3), ces équations $f_j = 0$ seront vérifiées, et ainsi le résultant de deux quelconques de ces équations par rapport à y_1 s'annulera pour les valeurs $y_2 = \zeta_2 \ldots y_n = \zeta_n\ x_1 = \varepsilon_1 \ldots x_s = \varepsilon_s$.

Appelons, par exemple,

$$F'_2(y_2 \ldots y_n \cdot x_1 \ldots x_s), \ldots F'_n(y_2 \ldots y_n\, x_1 \ldots x_s)$$

les résultants des équations $(f_1 f_2)$ $(f_1 f_3) \ldots (f_1 f_n)$.

Comme le résultant de deux équations algébriques est une fonction rationnelle entière de leurs coefficients, les fonctions $F'_2 \ldots F'_n$ seront encore holomorphes ; d'après ce qui a été dit, elles s'annuleront pour tous les systèmes de valeurs de $y_2 \ldots y_n\ x_1 \ldots x_s$ qui appartiennent à des solutions $y_1 \ldots y_n\ x_1 \ldots x_s$ des équations (5).

(*) Nous supposons, bien entendu, que le coefficient de la plus haute puissance de y_1 est l'unité. Cette supposition sera toujours implicitement contenue dans toutes nos conclusions du § 2.

D'ailleurs, en supposant le lemme de Weierstrass applicable, les équations $F' = 0$ sont, dans le domaine de zéro, entièrement équivalentes à des équations $f' = 0$ rationnelles entières en y_2 et à coefficients holomorphes en $y_3\, y_4 \dots y_n\ x_1 \dots x_s$ s'annulant au point zéro. Donc, si nous adjoignons les équations $f' = 0$ aux équations $f_j = 0$ dans le domaine de (0), toute solution des équations (3) sera une solution des équations $(f_j = 0\ f' = 0)$ et réciproquement.

En opérant maintenant sur les équations $f' = 0$ comme nous avons opéré sur les équations $f_j = 0$, nous formerons des résultants F'' qui ne dépendront plus que de $y_3 \dots y_n\ x_1 \dots x_s$, et par le lemme de Weierstrass nous formerons des équations $f'' = 0$, équivalentes aux équations $F'' = 0$, mais rationnelles entières en y_3. Ces équations $f'' = 0$ pourront être adjointes au système $(f_j = 0,\ f' = 0)$ et toute solution des équations (3) sera solution des équations $(f_j = 0\ f' = 0\ f'' = 0)$ et réciproquement.

En continuant de même, on arrivera à un système d'équations

$$f_j = 0\ f' = 0\ f'' = 0 \dots f^{n-1} = 0 \quad (j = 1, 2 \dots n) \qquad (8)$$

entièrement équivalent au système (3) dans le domaine de zéro. Ces équations seront respectivement des équations rationnelles entières en $y_1\, y_2 \dots y_n$ et à coefficients holomorphes respectivement en $(y_2\, y_3 \dots y_n\ x_1 \dots x_s)$, $(y_3 \dots y_n\ x_1 \dots x_s) \dots (x_1 \dots x_s)$, tous ces coefficients s'annulant au point zéro.

Mais, par un théorème que nous établirons dans la suite de ce travail (théorème I, corollaire, § 10), si f' est une fonction rationnelle entière de degré p en y_2, dont le coefficient de y_2^p est l'unité et dont les autres coefficients sont des fonctions holomorphes de $y_3 \dots y_n\ x_1 \dots x_s$ s'annulant au point zéro, toute fonction holomorphe $a\,(y_2 \dots y_n\ x_1 \dots x_s)$ dans le domaine de zéro peut s'écrire identiquement

$$a\,(y_2 \dots y_n\, x_1 \dots x_s) = \alpha_1 y_2^{p-1} + \alpha_2 y_2^{p-2} + \dots + \alpha_p + f'\lambda \qquad (9)$$

les α étant des fonctions holomorphes de $y_3 \dots y_n\ x_1 \dots x_s$ seulement et λ une fonction holomorphe de $y_2 y_3 \dots y_n\ x_1 \dots x_s$.

Si nous supposons donc que le polynôme f' est le premier membre d'une des équations $f' = 0$ du système (8), à cause de $f' = 0$, les coefficients des équations $f_j = 0$ du système (8) pourront, d'après (9), se placer sous forme de polynômes entiers en y_2 à coefficients holomorphes en $y_3 \dots y_n \; x_1 \dots x_s$. Ces derniers coefficients eux-mêmes se ramèneront de la même manière au moyen d'une équation $f'' = 0$ du système (8), à des polynômes entiers en y_3 à coefficients holomorphes en $y_4 \dots y_n$ $x_1 \dots x_s$.

En continuant de même, et en faisant usage des équations $f''' = 0 \dots f^{n-1} = 0$ du système (8), on arrivera finalement à des coefficients qui seront des fonctions holomorphes de $x_1 \dots x_s$ seulement, et alors les équations $f_j = 0$ $(j = 1, 2 \dots n)$ seront devenues des équations

$$H_1 = 0 \dots H_n = 0 \qquad (10)$$

rationnelles entières en $y_1 \dots y_n$ et à coefficients holomorphes en $x_1 \dots x_s$ dans le domaine de zéro.

Si l'on opère sur les équations $f' = 0$, $f'' = 0 \dots$ comme on a opéré sur les équations $f_j = 0$, on ramènera également ces dernières à des équations algébriques

$$H' = 0 \;\; H'' = 0 \dots H^{n-1} = f^{n-1} = 0 \qquad (11)$$

respectivement entières en $(y_2 y_3 \dots y_n)$, $y_3 \dots y_n) \dots (y_n)$, et à coefficients holomorphes en $x_1 \dots x_s$.

Par le procédé employé pour obtenir les équations (10) et (11), on voit que dans le domaine du point (0), toute solution des équations (3) satisfera à ces équations (10) et (11).

Inversement, toute solution des équations (10) et (11) sera solution du système (3).

D'abord, on a identiquement $H^{n-1} = f^{n-1}$. Ensuite, par le théorème rappelé plus haut et exprimé par la formule (9), on a

$$f^{n-2} = H^{n-2} + \lambda f^{n-1} = H^{n-2} + \lambda H^{n-1},$$

et ainsi les équations $H^{n-1} = 0 \;\; H^{n-2} = 0$ entraînent dans le domaine de zéro les équations $f^{n-1} = 0 \;\; f^{n-2} = 0$.

En continuant de même, on verra que les équations (10) et (11) entraînent toutes les équations (8). Or, celles-ci sont équivalentes au système (3). Donc toute solution de (10) et (11) sera solution des équations (3).

Nous ne nous attarderons pas à examiner quelles sont parmi les équations (10) et (11) celles qui sont surabondantes et si l'on peut se borner à considérer seulement les équations (10). Il nous suffit, pour ce qui va suivre, d'avoir montré que toutes les solutions du système (3) dans le domaine de zéro peuvent en général (c'est-à-dire lorsque le lemme de Weierstrass est applicable) s'obtenir par la considération d'un système d'équations algébriques en $y_1 \dots y_n$ à coefficients holomorphes en $x_1 \dots x_s$.

3. La question posée à la fin du § 1 semble donc résolue; mais il faut reconnaître que la méthode employée est lourde, manque d'élégance; de plus, elle ne fournit de renseignements précis sur la réduction du système (3), que lorsque tous les calculs relatifs à cette réduction ont été effectués.

Tout d'abord, pour qu'on puisse mener cette méthode à bien, il faut que le lemme de Weierstrass soit chaque fois applicable aux résultats F', F''... que l'on forme successivement, c'est-à-dire il faut pour chaque résultant que les dérivées relatives à une même variable y ne s'annulent pas toutes au point (0).

Or, de la réalisation de ce fait on ne sera averti qu'en effectuant les calculs.

Il en est de même en ce qui concerne le degré final des équations (10) et (11) en les différentes variables $y_1 \dots y_n$. D'ailleurs, ainsi qu'on peut s'en assurer par un exemple, ce degré variera considérablement suivant l'ordre dans lequel on aura pris les variables $y_1 \dots y_n$ pour faire la réduction du système (3).

Or, pour l'étude des singularités des fonctions $y_1 \dots y_n$ de $x_1 \dots x_s$ définies par le système (3) dans le domaine de zéro, il est, au contraire, de grande importance de ramener le système (3) à une forme algébrique canonique.

4. Ces inconvénients n'existent pas dans le cas où le système (3) se réduit à une seule équation (5). Alors, le lemme de Weierstrass indique *avant tout calcul* la possibilité de la réduction si l'une des dérivées $\frac{\partial^p F}{\partial y^p}$ ne s'annule pas au point zéro, et l'ordre de la première dérivée qui ne s'annule pas caractérise en même temps le degré de l'équation algébrique équivalente à l'équation donnée.

Pour obtenir les mêmes avantages pour les systèmes d'équations (3), il est naturel de chercher s'il n'existe pas certaines combinaisons des dérivées de $F_1 \ldots F_n$ qui, pour les systèmes tels que (3), jouent le rôle des dérivées successives dans le cas d'une seule équation (5).

Le présent travail apporte, croyons-nous, la première contribution à la question envisagée de ce point de vue. Nous avons été assez heureux pour ramener les systèmes (3) à une forme algébrique canonique lorsque l'un des mineurs du déterminant fonctionnel J_1 (formule 2) reste différent de zéro au point zéro et lorsqu'une série de combinaisons de dérivées $J_2 J_3 J_4 \ldots$, qui seront définies dans la suite, ne s'annulent pas toutes au point zéro. Comme dans le cas d'une seule équation, la première des quantités J qui ne s'annulent pas au point zéro caractérise les degrés des équations algébriques équivalentes au système (3). De plus, ces fonctions J se réduisent aux dérivées successives de l'équation (5), si le système (3) se réduit à cette seule équation (5).

5. L'obtention des quantités $J_2 J_3 \ldots$ ne constituait pas la seule difficulté du problème. Il fallait en même temps obtenir une méthode de démonstration faisant entrer en considération ces quantités $J_2 J_3 \ldots$

On ne pouvait pas dans ce but songer à généraliser les démonstrations classiques du lemme de Weierstrass qui sont basées sur les intégrales de Cauchy ou simplement sur la variation de l'argument du logarithme d'une fonction le long d'un contour formé; en effet, les propriétés sur lesquelles elles

s'appuient ou bien ne sont pas connues, ou bien ne subsistent pas pour les fonctions de plusieurs variables.

D'ailleurs, il faut observer que les démonstrations classiques du lemme de Weierstrass établissent bien que l'équation (5) peut se ramener à une équation (6) dont les coefficients a sont holomorphes; mais elles ne fournissent aucun moyen pour le calcul des valeurs d'un nombre quelconque de dérivées de ces coefficients au point zéro. La méthode de réduction du système (3) indiquée au § 2 est ainsi illusoire; car, si même on voulait s'en contenter, comme on ne connaît pas les dérivées des coefficients des équations (7), on ne pourrait pas connaître non plus les dérivées des résultants $F' = 0$, et ainsi il serait impossible d'appliquer à ceux-ci le lemme de Weierstrass pour les transformer en les polynômes $f' = 0$.

De toute façon, il fallait donc trouver une nouvelle méthode de démonstration du lemme de Weierstrass, si possible susceptible d'extension aux systèmes d'équations à plusieurs fonctions inconnues.

6. Nous sommes parti de l'idée que les coefficients $a_1 \dots a_p$ de l'équation (6), étant holomorphes, pouvaient être considérés comme définis par un système d'équations implicites à déterminant fonctionnel différent de zéro et nous avons pu former aisément ces équations. En admettant, en effet, que les solutions de (6) satisfont à l'équation (5), on peut placer (th. I, § 9) cette dernière sous la forme

$$F = \varphi_1 y^{p-1} + \varphi_2 y^{p-2} + \dots + \varphi_p = 0,$$

les φ étant holomorphes en $x_1 \dots x_s$ et $a_1 \dots a_p$, et l'on peut voir que les équations

$$\varphi_1 = 0 \dots \varphi_p = 0 \qquad (12)$$

définissent les a en fonctions holomorphes des x (théorème II, § 11).

Pour achever la démonstration, il ne reste plus alors qu'à montrer que toute solution de (5) est solution de (6), si les a ont les valeurs définies par les équations (12).

Cette méthode s'étend aisément aux systèmes d'équations. Considérons une variable auxiliaire t qui satisfait à une équation algébrique en t de degré p :

$$t^p + b_1 t^{p-1} + \cdots b_p = 0, \qquad (13)$$

à coefficients b holomorphes en $x_1 \ldots x_s$, et prenons en général

$$y_i = a_i^1 t^{p-1} + a_i^2 t^{p-2} + \cdots + a_i^p \quad (i = 1, 2 \ldots n), \qquad (14)$$

où les a sont holomorphes en $x_1 \ldots x_s$; si nous supposons que les valeurs (14) des y satisfont aux équations (5), on parvient (par des procédés analogues à ceux du théorème I, § 9) à mettre ces équations sous la forme

$$F_i = \varphi_i^1 t^{p-1} + \varphi_i^2 t^{p-2} + \cdots + \varphi_i^p = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots n),$$

les φ étant holomorphes en les a, b et x. En prenant alors pour t une combinaison convenable des y, linéaire à coefficients constants, les équations de condition qui en résultent entre les a_i^k jointes aux équations

$$\varphi_i^k = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots n, \quad k = 1, 2 \ldots p)$$

déterminent les a et b en fonctions holomorphes de $x_1 \ldots x_s$, et l'on achève encore la démonstration en montrant que toute solution du système (3) s'obtient par (13) et (14).

Si l'on remplace maintenant t dans (13) et (14) par la combinaison linéaire des y qu'il représente, on obtient n équations algébriques distinctes en $y_1 \ldots y_n$, à coefficients holomorphes en $x_1 \ldots x_s$, et qui sont entièrement équivalentes au système (3) dans le domaine du point zéro.

Cependant, en dépit de la simplicité de l'idée et de la symé-

trie des résultats, cette méthode ne laisse pas d'être extrêmement compliquée lorsqu'il s'agit d'établir la démonstration dans tous ses détails. Aussi, bien que nous soyons persuadé que cette méthode conduirait dans le cas général par l'introduction non plus d'une, mais de n variables auxiliaires $t_1 \dots t_n$, à la forme canonique des équations algébriques équivalentes au système (3), avons-nous adopté dans ce travail un autre procédé de démonstration.

Ce procédé, qui nous a été signalé dans un cas particulier par M. le professeur J. Deruyts, à l'occasion d'un exposé de nos premiers résultats, s'étend aisément à un système quelconque d'équations (3) dont un des mineurs du déterminant J_1 est différent de zéro au point zéro. Il profite précisément de ce fait qu'un des mineurs du déterminant fonctionnel J_1, qui est lui-même encore un déterminant fonctionnel, est différent de zéro au point (0), pour ramener le système (3) à une seule équation (5) à laquelle s'applique le lemme de Weierstrass.

7. Nous avons reconnu que notre méthode de démonstration du lemme de Weierstrass, esquissée au paragraphe précédent, avait déjà été imaginée par M. E. Goursat (*), en 1908. Notre méthode ne diffère guère de celle de M. Goursat que par le détail des démonstrations; mais nous continuerons néanmoins à l'exposer en raison de l'application importante que nous devrons faire des résultats qu'elle fournit aux systèmes de plusieurs équations. Cet exposé fera l'objet de la première partie de notre travail.

Dans la seconde partie, nous étudierons les propriétés principales des quantités J_2 J_3 ... et nous établirons la généralisation du lemme de Weierstrass qui en est la conséquence.

(*) E. Goursat, *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1908, p. 209.

I. — Cas d'une seule équation (*).

8. Lemme. — Si dans l'équation de degré p

$$y^p = b_1 y^{p-1} + \cdots + b_{p-1} y + b_p, \qquad (1)$$

les coefficients (réels ou imaginaires) satisfont aux inégalités

$$|b_i| \leqslant \frac{\rho^i}{p} \quad (i = 1, 2 \ldots p), \quad (\rho > 0), \qquad (2)$$

les racines y de (1) ne dépassent pas, en module, la quantité ρ.

En effet, on a, à cause de (2),

$$|y^p - b_1 y^{p-1} - \cdots - b_p| \geqslant |y|^p - |b_1|\,|y|^{p-1} - \cdots - |b_p|$$

$$\geqslant |y|^p - \frac{\rho}{p}|y|^{p-1} - \cdots - \frac{\rho^p}{p} \geqslant |y|^p \left\{1 - \frac{1}{p}\left[\frac{\rho}{|y|} + \frac{\rho^2}{|y|^2} + \cdots \frac{\rho^p}{|y|^p}\right]\right\}.$$

Or, pour $|y| > \rho$, on a

$$\frac{\rho}{|y|} < 1 \quad \text{et} \quad \frac{\rho}{|y|} + \frac{\rho^2}{|y|^2} + \cdots \frac{\rho^p}{|y|^p} < p.$$

Par suite,

$$|y^p - b_1 y^{p-1} - \cdots - b_p| > 0 \quad \text{pour} \quad |y| > \rho,$$

c'est-à-dire que (1) n'a pas de racine supérieure en module à ρ.

(*) Dans cette étude on supposera connu le théorème des fonctions implicites pour un nombre quelconque d'équations. Comme on le sait, ce théorème peut s'établir au moyen de théorèmes élémentaires sur les variables réelles et des formules de définition des fonctions de variables complexes. De plus, les développements en séries des fonctions définies par les équations données peuvent s'obtenir en calculant de proche en proche leurs coefficients, par différentiations successives de ces équations.

9. Théorème I. — Soit $F(y, x_1 \dots x_s)$ une fonction de $yx_1 \dots x_s$ holomorphe dans le domaine Δ formé par la réunion du domaine défini par $|y| \leqslant r (r > 0)$ et du domaine D de variation des x.

Si l'on prend pour y une racine de l'équation

$$y^p = b_1 y^{p-1} + \dots + b_p, \tag{3}$$

où l'on a

$$|b_i| < \frac{\gamma^i}{p} \quad \text{(égalités exclues)} \quad (i = 1, 2 \dots p), \tag{4}$$

on aura

$$F(yx_1 \dots x_s) = \varphi_1 y^{p-1} + \varphi_2 y^{p-2} + \dots + \varphi_p,$$

les φ étant des fonctions holomorphes des b et des x lorsque les b satisfont aux inégalités (4) et lorsque les x appartiennent au domaine D.

D'après les conditions de l'énoncé on peut écrire

$$F(y\, x_1 \dots x_s) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n y^n, \tag{5}$$

où les A_n sont des fonctions de $x_1 \dots x_s$ holomorphes dans D. De plus, si l'on appelle M le module maximum de F dans Δ, on aura dans D

$$|A_n| < \frac{M}{r^n}. \tag{6}$$

Actuellement, soit ρ une quantité positive inférieure à r :

$$0 < \rho < r. \tag{7}$$

Alors si l'on a

$$|b_i| < \frac{\rho^i}{p}, \tag{8}$$

d'après le lemme précédent toutes les racines de l'équation (5)

seront en modules, inférieures à ρ. Or la série (5) étant convergente pour $|y| < \rho < r$, on pourra prendre pour y une racine de (3), et pour une telle valeur de y, en faisant usage de l'équation (3), il sera possible d'obtenir une puissance quelconque de y en fonction linéaire de $y^{p-1} \ldots y^1, y^0$, de telle façon qu'on écrira

$$^{l} = \sum_{i=1}^{i=p} y^{p-i}\alpha_i^l, \qquad (9)$$

les α étant des polynômes entiers en b.

Calcul des α. — On déduit de cette dernière formule

$$y^{l+1} = \sum_{i=1}^{i=p} y^{p-i+1}\alpha_i^l = y^p\alpha_1^l + \sum_{i=2}^{i=p} y^{p-i+1}\alpha_i^l = y^p\alpha_1^l + \sum_{i=1}^{p-1} y^{p-i}\alpha_{i+1}^l$$

et, en tenant compte de (3) et convenant de prendre

$$\alpha_i^l = 0 \qquad \text{pour} \qquad i > p,$$

$$y^{l+1} = \alpha_1^l \sum_{i=1}^{i=p} y^{p-i}b_i + \sum_{i=1}^{i=p} y^{p-i}\alpha_{i+1}^l = \sum_{i=1}^{i=p} y^{p-i}(\alpha_1^l b_i + \alpha_{i+1}^l).$$

Comme, d'autre part,

$$y^{l+1} = \sum_{i=1}^{i=p} y^{p-i}\alpha_i^{l+1}$$

et que les α ne peuvent s'exprimer que d'une seule façon en fonction des b (*), on aura identiquement

$$\alpha_i^{l+1} = \alpha_1^l b_i + \alpha_{i+1}^l \quad (l \geq 0)$$

(*) Les α ne peuvent s'exprimer que d'une manière en fonction des b; car s'il pouvait exister deux expressions différentes α' et α'', on aurait $y^l = \sum_{i=1}^{p} y^{p-1}\alpha_i'^l = \sum_{i=1}^{p} y^{p-1}\alpha_i''^l$ et toute racine de l'équation (3) de degré p serait ainsi racine d'une équation de degré $p-1$, ce qui est impossible si les racines de (3) sont distinctes. Le calcul des α étant indépendant de la nature des racines de (3), le résultat subsiste dans tous les cas.

ou, par changement de l en $l-1$,

$$\alpha_i^l = \alpha_i^{l-1} b_i + \alpha_{i+1}^{l-1} \quad (l \geqslant 1). \tag{10}$$

Dans cette formule récurrente faisons $i = p$; il vient

$$\alpha_p^l = b_p \alpha_1^{l-1} \quad (l \geqslant 1). \tag{11}$$

Faisons $i = p-1$:

$$\alpha_{p-1}^l = b_{p-1} \alpha_1^{l-1} + \alpha_p^{l-1} \quad (l \geqslant 1)$$

et, à cause de (11),

$$\alpha_{p-1}^l = b_{p-1} \alpha_1^{l-1} + b_p \alpha_1^{l-2} \quad (l \geqslant 2).$$

En général on aura

$$\alpha_{p-k}^l = b_{p-k} \alpha_1^{l-1} + b_{p-k+1} \alpha_1^{l-2} + \cdots + b_p \alpha_1^{l-k-1} \quad (l \geqslant k+1), \tag{12}$$

comme on le voit en remarquant que la formule a lieu pour $k = 1$ et que, à cause de (10), si elle a lieu pour le nombre k, elle est encore vérifiée pour le nombre $k+1$.

En particulier, on déduit de (12)

$$\alpha_1^l = b_1 \alpha_1^{l-1} + b_2 \alpha_1^{l-2} + \cdots + b_p \alpha_1^{l-p} \quad (l \geqslant p). \tag{13}$$

On observera aussi que l'on a

$$\alpha_i^p = b_i \quad \text{d'après (3)}$$

et

$$\left.\begin{array}{lll} \alpha_1^0 = 0 & \cdots & \alpha_p^0 = 1 \\ \alpha_1^1 = 0 & \cdots \quad \alpha_{p-1}^1 = 1 & \alpha_p^1 = 0 \\ \cdots\cdots & \cdot \quad \cdot & \cdots\cdots \\ \alpha_1^{p-1} = 1 & \cdots & \alpha_p^{p-1} = 0. \end{array}\right\} \tag{14}$$

Ces dernières formules traduisent simplement les identités

$$y^0 = 1 \quad y = y \quad y^2 = y^2 \quad \cdots \quad y^{p-1} = y^{p-1}.$$

Limites supérieures des modules des α. — Lorsque les inégalités (8) ont lieu, on a en général

$$|\alpha_1^l| < \rho^{l-p+1}. \tag{15}$$

En effet, d'abord si $l < p$, on voit immédiatement par (14) que la relation (15) a lieu. Supposons qu'elle ait lieu pour tous les entiers inférieurs à l. Elle aura encore lieu pour l'entier l. En effet, par (13) et (8), on a

$$|\alpha_1^l| \leqslant |b_1|\,|\alpha_1^{l-1}| + \cdots + |b_p| \cdot |\alpha_1^{l-p}| < \frac{\rho}{p} \cdot \rho^{l-p} + \cdots \frac{\rho^p}{p} \rho^{l-2p+1},$$

c'est-à-dire

$$|\alpha_1^l| < \rho^{l-p+1},$$

ce qui est la relation (15).

De (12) et (15) on déduit encore

$$\left|\alpha_{p-k}^l\right| = \left|\sum_{i=0}^{i=k} b_{p-i}\alpha_1^{l-k+i-1}\right| < \frac{1}{p}\sum_{i=0}^{i=k} \rho^{p-i}\left|\alpha_1^{l-k+i-1}\right| < \frac{1}{p}(k+1)\,\rho^{l-k}$$

et comme $k \leqslant p-1$,

$$|\alpha_l^{p-k}| < \rho^{l-k}. \tag{16}$$

Expression de la fonction F. — Au moyen des valeurs (9), le développement (5) de F s'écrira

$$\mathrm{F} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{A}_n\,(\alpha_1^n y^{p-1} + \alpha_2^n y^{p-2} + \cdots + \alpha_p^n).$$

Or, actuellement les séries

$$\varphi_k = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{A}_n \alpha_k^n \quad (k = 1, 2 \ldots p) \tag{17}$$

sont convergentes à cause de (6), (7) et (16).

On a, en effet,

$$|A_n \alpha_k^n| < \frac{M}{r^n} \cdot \rho^{n-p+k}$$

ou bien

$$|A_n \alpha_k^n| < \frac{M}{\rho^{p-k}} \cdot \left(\frac{\rho}{r}\right)^n. \qquad (18)$$

On pourra donc écrire

$$F = \varphi_1 y^{p-1} + \varphi_2 y^{p-2} + \cdots + \varphi_p, \qquad (19)$$

lorsque y est racine de (3) moyennant (8).

Propriétés des séries φ_k. — Les séries φ_k considérées comme fonctions de $b_1 \ldots b_p$ et $x_1 \ldots x_s$ sont des fonctions holomorphes de ces quantités lorsque les x appartiennent au domaine D et lorsque les b satisfont aux inégalités (8). En effet, dans ce cas les séries φ_k sont, à cause de (18), des séries uniformément convergentes de fonctions holomorphes et sont ainsi des fonctions holomorphes.

Comme dans tout ce qui précède ρ a pu être choisi aussi voisin qu'on le veut de r, on voit que si l'on donne les inégalités (4) (égalités exclues), il sera toujours possible de prendre ρ inférieur à r de manière à avoir les inégalités (8), et toutes les conséquences déduites de (8) subsisteront.

Le théorème se trouve donc ainsi complètement démontré.

10. Corollaire. — Si $b_1 \ldots b_p$ sont des fonctions holomorphes de $x_1 \ldots x_s$ dans le domaine du point $x_1 = \ldots = x_s = 0$ pour lequel elles s'annulent, et si l'on pose

$$y_p - b_1 y^{p-1} - \cdots - b_p = z, \qquad (20)$$

la fonction $F(y x_1 \ldots x_s)$ holomorphe dans le domaine de

$y = x_1 = \ldots = x_s = 0$ peut s'écrire identiquement dans ce domaine

$$F(yx_1 \ldots x_s) = \varphi_1 y^{p-1} + \varphi_2 y^{p-2} + \cdots + \varphi_p + \lambda z,$$

les φ étant des fonctions holomorphes de $x_1 \ldots x_s$ seulement et λ une fonction holomorphe de $y x_1 \ldots x_s$.

En effet, les fonctions holomorphes $b_1 \ldots b_p$ s'annulant pour $x_1 = \ldots = x_s = 0$ resteront aussi petites que l'on veut si $x_1 \ldots x_s$ sont suffisamment petits; alors z sera de même aussi petit que l'on veut si y est suffisamment petit, et ainsi les relations (4) relatives à l'équation (20), qui est

$$y^p = b_1 y^{p-1} + b_2 y^{p-2} + \cdots + (b_p + z),$$

seront vérifiées pour $y x_1 \ldots x_s$ suffisamment petits.

On aura donc, par le théorème que nous venons de démontrer,

$$F(yx_1 .., x_s) = \varphi_1(b_1 \ldots b_p + z, x_1 \ldots) y^{p-1} + \cdots + \varphi_p(b_1 \ldots b_p + z, \ldots), \quad (21)$$

les φ étant des fonctions holomorphes de $b_1 \ldots b_p + z$, $x_1 \ldots x_s$ dans le domaine de zéro.

Mais si $b_1 \ldots b_p$ sont suffisamment petits, les φ considérés comme fonctions de z seront holomorphes dans le domaine de $z = 0$ et l'on pourra écrire les développements

$$\varphi_i(b_1 \ldots b_p + z \ldots) = \varphi_i(b_1 \ldots b_p \ldots) + z \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_p} + \frac{z^2}{1.2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial b_p^2} + \cdots (i = 1, 2 \ldots n).$$

On aura donc, par (21),

$$F_i(yx_1 \ldots x_s) = \varphi_1 y^{p-1} + \cdots + \varphi_p + z\lambda, \quad (22)$$

en posant

$$\lambda = \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_p} y^{p-1} + \cdots + \frac{\partial \varphi_p}{\partial b_p} + \text{termes en } z, z^2, \text{ etc.} \quad (23)$$

Si l'on remplace maintenant dans la relation (22), z par sa valeur (20), et $b_1 \dots b_p$ par leurs expressions en $x_1 \dots x_s$, $\varphi_1 \dots \varphi_p$ deviendront des fonctions holomorphes de $x_1 \dots x_s$ seuls, et λ deviendra une fonction holomorphe de $yx_1 \dots x_s$. Comme d'ailleurs $yx_1 \dots x_s$ sont restés arbitraires, sauf la condition d'appartenir au domaine suffisamment petit du point $y = x_1 = \dots = x_s = 0$, la relation (22) sera dans ce domaine une identité.

11. Théorème II (lemme de Weierstrass). — Si la fonction $F(yx_1 \dots x_s)$ est holomorphe dans le domaine du point $y = x_1 = \dots x_s = 0$; si de plus on a en ce point

$$F_0 = 0 \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 = 0 \dots \left(\frac{\partial^{p-1} F}{\partial y^{p-1}}\right)_0 = 0, \qquad \text{mais} \qquad \left(\frac{\partial^p F}{\partial y^p}\right)_0 \neq 0,$$

on peut écrire dans le domaine de $y = x_1 = \dots x_s = 0$:

$$F(yx_1 \dots x_s) = (y^p - b_1 y^{p-1} - \dots - b_p)\, K(yx_1 \dots x_s), \quad (24)$$

les b étant des fonctions holomorphes de $x_1 \dots x_s$ s'annulant en $x_1 = \dots = x_s = 0$, et K une fonction holomorphe de $yx_1 \dots x_s$ différente de zéro en $y = x_1 = \dots = x_s = 0$.

— Nous supposerons, comme dans le théorème précédent, que la fonction F est holomorphe dans un certain domaine Δ, et qu'ainsi elle donne lieu à un développement (5).

D'après les conditions de l'énoncé on aura aussi en $x_1 = \dots = x_s = 0$

$$(A_0)_0 = 0 \quad (A_1)_0 = 0 \dots \quad (A_{p-1})_0 = 0 \quad (A_p)_0 \neq 0. \qquad (25)$$

Considérons actuellement les équations

$$\varphi_k = 0 \qquad (k = 1, 2 \dots p), \qquad (26)$$

les fonctions φ_k étant définies par les séries (17).

D'après le théorème précédent, ces fonctions sont holomorphes en $b_1 = \dots b_p = x_1 = \dots = x_s = 0$. D'ailleurs on voit qu'elles s'annulent pour ce système de valeurs, car par (12) on obtient pour $b_1 = \dots b_p = 0$

$$(\alpha_k^l)_0 = 0 \qquad \text{pour} \qquad l \geqslant p \qquad (k = 1, 2 \dots p) \qquad (27)$$

et pour $x_1 = \dots x_s = 0$, on a les formules (25).

Nous allons montrer que le déterminant fonctionnel $\frac{\partial(\varphi_1 \dots \varphi_p)}{\partial(b_1 \dots b_p)}$ rapporté au système $x_1 = \dots x_s = b_1 = \dots b_p = 0$ est différent de zéro.

Alors il résultera du théorème des fonctions implicites que les équations (25) définissent, dans le domaine de zéro, un système de fonctions $b_1 \dots b_p$ holomorphes en $x_1 \dots x_s$ et s'annulant en $x_1 = \dots x_s = 0$.

Calculons à cet effet les quantités $\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial b_j}\right)_0$.

Les développements (17) étant uniformément convergents et à termes holomorphes, les séries des termes dérivés sont aussi uniformément convergentes, et l'on a, à cause de (25),

$$\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial b_j}\right)_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n)_0 \left(\frac{\partial \alpha_k^n}{\partial b_j}\right)_0 = \sum_{n=p}^{\infty} (A_n)_0 \left(\frac{\partial \alpha_k^n}{\partial b_j}\right)_0. \qquad (28)$$

Or, la formule (12), qui peut s'écrire

$$\alpha_k^n = b_k \alpha_1^{n-1} + b_{k+1} \alpha_1^{n-2} + \dots + b_p \alpha_1^{n-p+k-1} \quad (n \geqslant p + 1 - k), \qquad (29)$$

donne

$$\left(\frac{\partial \alpha_k^n}{\partial b_j}\right)_0 = 0 \qquad \text{pour} \qquad j < k \qquad (30)$$

et

$$\left(\frac{\partial \alpha_k^n}{\partial b_k}\right)_0 = (\alpha_1^{n-1})_0,$$

c'est-à-dire, d'après (27) et (14),

$$\left(\frac{\partial \alpha_k^n}{\partial b_k}\right)_0 = 0 \quad \text{pour} \quad n > p \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial \alpha_k^p}{\partial b_k}\right)_0 = 1. \tag{31}$$

D'après (28), (30) et (31), on obtient donc

$$\left(\frac{\partial \varphi_i^k}{\partial b_j}\right)_0 = 0 \quad \text{pour} \quad j < k \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial \varphi_i^k}{\partial b_k}\right)_0 = (\mathrm{A}_p)_0, \tag{32}$$

et ainsi on a

$$\left(\frac{\partial(\varphi_1 \dots \varphi_p)}{\partial(b_1 \dots b_p)}\right)_0 = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial b_1}\right)_0 \dots \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial b_p}\right)_0 \\ \dots \dots \dots \\ \left(\frac{\partial \varphi_p}{\partial b_1}\right)_0 \dots \left(\frac{\partial \varphi_p}{\partial b_p}\right)_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\mathrm{A}_p)_0 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial b_2}\right)_0 \dots \\ 0 \quad (\mathrm{A}_p)_0 \quad \vdots \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ 0 \quad \dots \quad 0 \quad (\mathrm{A}_p)_0 \end{vmatrix} = (\mathrm{A}_p)_0^p \neq 0,$$

ce qui établit l'existence des fonctions holomorphes $b_1 \dots b_p$ de $x_1 \dots x_s$ satisfaisant identiquement dans le domaine de zéro aux équations (26) et s'annulant en $x_1 = \dots = x_s = 0$.

Considérons à présent l'équation

$$y^p - b_1 y^{p-1} - \dots - b_p = z. \tag{33}$$

où $b_1 \dots b_p$ sont les fonctions de $x_1 \dots x_s$ définies par les équations $\varphi_k = 0$ dans le domaine de zéro.

En répétant les raisonnements du corollaire du Théorème I (§ 10), on écrira identiquement dans le domaine de $y = x_1 = \dots x_s = 0$

$$\Gamma(y x_1 \dots x_s) = \varphi_1 y^{p-1} + \varphi_2 y^{p-2} + \dots + \varphi_p + z\lambda,$$

où les φ ont les expressions (17) et où λ est une fonction holomorphe définie par (23).

Mais, actuellement, on a identiquement $\varphi_1 = 0 \dots \varphi_p = 0$, puisque les b satisfont aux équations (26). Par suite, on aura identiquement dans le domaine de zéro

$$F(yx_1 \dots x_3) = z\lambda. \qquad (34)$$

D'ailleurs, pour $y = x_1 = \dots x_s = 0$, on a $b_1 = \dots b_p = 0$ et par (33), $z = 0$. D'après l'expression (23) de λ, il vient donc

$$\lambda_0 = \left(\frac{\partial \varphi_p}{\partial b_p}\right)_0,$$

c'est-à-dire, d'après (32) et (25),

$$\lambda_0 = (A_p)_0 \neq 0.$$

Aux notations près, l'identité (34) est la formule (24) de l'énoncé, qui se trouve ainsi complètement établi.

12. Corollaire. — Il résulte immédiatement du théorème précédent que, sous les conditions indiquées dans l'énoncé, l'équation

$$F(yx_1 \dots x_s) = 0$$

est dans le domaine de zéro équivalente à l'équation algébrique à coefficients holomorphes

$$y^p - b_1 y^{p-1} - \dots - b_p = 0.$$

II. — Cas de n équations.

1. Systèmes équivalents (*).

13. Considérons un système de n fonctions de m variables $y_1 \dots y_m$:

$$F_1(y_1 \dots y_m) \dots F_n(y_1 \dots y_m), \quad (m \geqq n),$$

holomorphes dans un certain domaine Δ.

(*) La notion de « systèmes équivalents » développée ici est une extension de la notion d'équivalence des systèmes modulaires, en algèbre.

Soient

$$K_{il} \quad (i, l = 1, 2 \dots n)$$

n^2 fonctions de $y_1 \dots y_m$ holomorphes dans un domaine D intérieur à Δ. Si le déterminant

$$|\pm K_{11} \dots K_{nn}|$$

reste différent de zéro dans D, nous dirons que le système de fonctions $(F'_1 \dots F'_n)$ défini par les relations

$$\begin{aligned} F'_1 &= K_{11}F_1 + \dots + K_{1n}F_n \\ &\cdots\cdots\cdots \\ F'_n &= K_{n1}F_1 + \dots + K_{nn}F_n \end{aligned}$$

est *équivalent* au système $(F_1 \dots F_n)$ dans D (ou encore, que les systèmes $(F_1 \dots F_n)$, $(F'_1 \dots F'_n)$ sont équivalents dans D).

Dans ces conditions, les équations $F_i = 0$ $(i = 1, 2 \dots n)$ entraînent dans D les équations $F'_i = 0$ et réciproquement.

Nous dirons que l'on passe du système $(F_1 \dots F_n)$ au système $(F'_1 \dots F'_n)$ par la « transformation équivalente »

$$\left.\begin{matrix} K_{11} \dots K_{1n} \\ \cdots\cdots \\ K_{n1} \dots K_{nn} \end{matrix}\right\} \text{(T)} \quad (|\pm K_{11}, .. K_{nn}| \neq 0).$$

Si l'on résoud les équations

$$F'_i = K_{i1}F_1 + \dots + K_{in}F_n \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

par rapport aux F_i, on aura

$$F_i = L_{i1}F'_1 + \dots + L_{in}F'_n \quad (i = 1, 2 \dots n),$$

où les L sont aussi des fonctions holomorphes de $y_1 \dots y_m$ dans D.

Nous savons que la transformation

$$\left.\begin{matrix} L_{11} \dots L_{1n} \\ \dots\dots \\ L_{n1} \dots L_{nn} \end{matrix}\right\} (T_{-1}),$$

qui est encore une transformation équivalente, est la « transformation inverse » de la transformation T.

On voit immédiatement qu'une transformation équivalente et son inverse, effectuées successivement, n'altèrent pas le système $(F_1 \dots F_n)$ (ou encore, ont pour produit la « transformation unité »).

2. Ordre des zéros d'un système de fonctions.

14. *Notations.* — Afin d'éviter des répétitions inutiles, nous définirons, dès à présent, des notations que nous emploierons continuellement dans la suite.

Nous représenterons d'une façon générale par $\mathcal{A}_{ik}$ les mineurs d'un déterminant, quelle que soit la nature de ce déterminant :

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} \dots \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial y_1} \dots \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}.$$

Le mineur $\mathcal{A}_{ik}$ correspondra dans le premier cas à l'élément a_{ik}; dans le second cas à l'élément $\dfrac{\partial F_i}{\partial y_k}$.

Nous rencontrerons également souvent une quantité L_k que nous écrirons, conformément à un symbolisme généralement adopté,

$$L_k = \left(\mathcal{A}_{11} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \dots + \mathcal{A}_{1n} \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \right)^{k)},$$

en entendant que l'on doit développer le second membre

comme une $k^{ième}$ puissance, puis remplacer les produits de dérivées

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\right)^{p_1} \cdots \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_n}\right)^{p_n}, \quad (p_1 + \cdots + p_n = k)$$

par les dérivées multiples correspondantes :

$$\frac{\partial^k F_1}{\partial y_1^{p_1} \cdots \partial y_n^{p_n}}.$$

Enfin, nous désignerons toujours par $J_1 J_2 \ldots J_k \ldots$ des déterminants jacobiens qui vont être définis au paragraphe suivant.

15. *Les invariants* J. — Considérons un système de n fonctions

$$F_1(y_1 \ldots y_n) \ldots F_n(y_1 \ldots y_n) \tag{1}$$

holomorphes dans le domaine du point $y_1 = \ldots = y_n = 0$, où elles s'annulent. Posons

$$J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

et supposons que l'un au moins des mineurs $\mathcal{A}_{ik}$ de ce déterminant fonctionnel ne s'annule pas au point zéro. En changeant éventuellement l'ordre des fonctions $F_1 \ldots F_n$, on pourra toujours supposer que c'est un des mineurs

$$\mathcal{A}_{11}\mathcal{A}_{12} \ldots \mathcal{A}_{1n} \tag{3}$$

relatifs à la premi[illegible] ligne de J_1, qui ne s'annule pas au point zéro.

Cela étant, posons encore,

$$J_k = \begin{vmatrix} \frac{\partial J_{k-1}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial J_{k-1}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_i} \end{vmatrix} \quad (k = 2, 3, \ldots). \qquad (4)$$

A cause de (2), cette relation définira par récurrence les déterminants jacobiens $J_2 J_3 \ldots J_k \ldots$

Dans ces conditions, si l'on a au point zéro

$$\left.\begin{array}{c} (F_1)_0 = 0 \ \ldots \ (F_n)_0 = 0 \\ (J_1)_0 = 0 \quad (J_2)_0 = 0 \ \ldots \ (J_{p-1})_0 = 0 \quad \text{mais} \quad (J_p)_0 \neq 0 \end{array}\right\} \qquad (5)$$

nous dirons que le système $(F_1 \ldots F_n)$ a en $y_1 = \ldots y_n = 0$ un *zéro d'ordre* p (*).

On peut observer que si le système $(F_1 \ldots F_n)$ se réduit à une seule fonction $F(y)$, les quantités $J_1 J_2 J_3 \ldots$ se réduisent aux dérivées successives $\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \ldots$ et qu'ainsi les conditions (5) expriment que le développement de $F(y)$ en série de Taylor commence par un terme en y^p. La définition précédente de l'ordre d'un zéro concorde donc avec la définition algébrique de la multiplicité d'une racine d'un polynôme entier.

On pourrait vérifier aussi que l'ordre du zéro d'un système $(F_1 \ldots F_n)$, tel que nous venons de le définir, ne change pas si l'on remplace ce système par un système équivalent (§ 15). Toutefois, la démonstration serait longue; aussi, nous borne-

---

(*) On pourrait dire « zéro d'ordre p de première espèce », afin de rappeler que l'un des mineurs $(\mathcal{A}_{0ik})_0$ a été supposé différent de zéro. Toutefois, comme nous nous placerons toujours dans cette hypothèse, on peut se borner actuellement à la désignation plus brève du texte.

rons-nous à la faire actuellement pour une transformation équivalente particulière, qui nous sera très utile dans la suite.

D'ailleurs, comme on le verra, l'invariance de l'ordre du zéro d'un système $(F_1 \dots F_n)$, dans ses transformations équivalentes, résultera à posteriori des théorèmes que nous établirons en nous basant sur la notion d'ordre telle qu'elle vient d'être définie (§ 22).

16. Théorème III. — Supposons que l'on remplace le système $(F_1 \dots F_n)$, de fonctions holomorphes en $y_1 = \dots y_n = 0$ et s'annulant en ce point, par le système équivalent $(F'_1 \dots F'_n)$ défini par les relations

$$\left.\begin{aligned} F'_1 &= F_1 + \lambda_2 F_2 + \dots + \lambda_n F_n \\ F'_i &= F_i \quad (i \equiv 2, 3 \dots n) \end{aligned}\right\} \quad (T),$$

où $\lambda_2 \dots \lambda_n$ sont des fonctions quelconques mais holomorphes en $y_1 = \dots = y_n = 0$.

Désignons par $J'_1 \dots J'_p \dots$ les déterminants $J_1 \dots J_p \dots$ relatifs au nouveau système $(F'_1 \dots F'_n)$.

Dans ces conditions, si l'on a

$$(J_1)_0 = 0 \ \dots \ (J_{p-1})_0 = 0, \tag{6}$$

on a, après la transformation équivalente T,

$$\left.\begin{aligned} (J'_1)_0 = 0 \ \dots \ (J'_{p-1})_0 &= 0 \\ (J'_p)_0 &= (J_p)_0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

— Le théorème s'établit par récurrence.

On peut d'abord observer qu'il suffit de le démontrer pour la transformation élémentaire T_{i1} :

$$\left.\begin{aligned} F'_1 &= F_1 + \lambda_i F_i \\ F'_2 &= F_2 \\ \dots & \\ F'_n &= F_n \end{aligned}\right\} \quad (i = 2, 3 \dots n), \quad (T_{i1}),$$

car on voit immédiatement que la transformation T s'obtient

par la composition des transformations T_{i1} pour $i = 2, 3 \ldots n$.

Cela étant, on a en général pour la transformation T_{i1}

$$J'_k = J_k + \alpha_1 J_{k-1} + \alpha_2 J_{k-2} + \cdots + \alpha_{k-1} J_1 + \beta F_i, \qquad (8)$$

les α et β étant holomorphes.

En effet, d'abord pour $k = 1$, on a

$$J'_1 = \left| \begin{matrix} \frac{\partial F'_1}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial F'_1}{\partial y_n} \\ \cdots \\ \frac{\partial F'_n}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial F'_n}{\partial y_n} \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \lambda \frac{\partial F_i}{\partial y_1} + F_i \frac{\partial \lambda}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial F_1}{\partial y_n} + \lambda \frac{\partial F_i}{\partial y_n} + F_i \frac{\partial \lambda}{\partial y_n} \\ \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} \qquad\qquad \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{matrix} \right|$$

$$= J_1 + \left| \begin{matrix} \frac{\partial \lambda}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial \lambda}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{matrix} \right| F_i.$$

ce qui est de la forme (8).

D'ailleurs, si la relation (8) a lieu pour une valeur k, elle a lieu aussi pour $k + 1$. En effet, on a, en écrivant seulement la première ligne des déterminants,

$$J'_{k+1} = \left| \frac{\partial J'_k}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial J'_k}{\partial y_n} \right| = J_{k+1} + \alpha_1 J_k + \alpha_2 J_{k-1} + \cdots + \alpha_{k-1} J_2$$

$$+ \left| \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_n} \right| J_{k-1} + \cdots + \left| \frac{\partial \beta}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial \beta}{\partial y_n} \right| F_i,$$

ce qui est encore de la forme (8), qui est donc générale.

Or, la relation (8) appliquée au point $y_1 = \ldots y_n = 0$ fournit immédiatement notre théorème. On a, en effet, puisque les F s'annulent pour $y_1 = \ldots = y_n = 0$,

$$(J'_k)_0 = (J_k)_0 + \alpha_1^0 (J_{k-1})_0 + \cdots + \alpha_{k-1}^0 (J_1)_0$$

et ainsi les conditions

$$(J_1)_0 = 0 \ldots (J_{k-1})_0 = 0$$

entraînent

$$(J'_k)_0 = (J_k)_0. \tag{9}$$

A cause de (6), cette dernière formule appliquée pour $k = 1, 2 \dots p$, fournit les relations (7), ce qui est le théorème.

Corollaire. — Il résulte immédiatement de ce théorème que l'ordre du zéro d'un système $(F_1 \dots F_n)$ reste inaltéré par une transformation équivalente telle que T.

17. Avant d'aller plus loin, il nous faut établir l'existence d'une transformation équivalente telle que T, jouissant de propriétés spéciales. Ce sera l'objet des trois théorèmes suivants :

Théorème IV. — Considérons une forme algébrique f_1 de degré k, et $n - 1$ formes linéaires $f_2 \dots f_n$, les variables étant $y_1 y_2 \dots y_n$:

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= \sum_{p_1+\dots+p_n=k} a_{p_1 \dots p_n} y_1^{p_1} \dots y_n^{p_n} \\ f_i &= a_{i1}y_1 + \dots + a_{in}y_n, \quad (i = 2, 3 \dots n). \end{aligned}\right\}$$

Supposons que les mineurs $\mathcal{A}_{11}, \mathcal{A}_{12} \dots \mathcal{A}_{1n}$ relatifs à la première ligne du déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{10}$$

ne soient pas tous nuls.

Alors, si la quantité

$$L_k = \left(\mathcal{A}_{11}\frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \dots + \mathcal{A}_{1n}\frac{\partial f_1}{\partial y_n}\right)^{k)} \tag{11}$$

est nulle, il est possible de trouver $n - 1$ formes $\varphi_2 \dots \varphi_n$, de degré $k - 1$ d'homogénéité, de manière à avoir identiquement

$$f_1 + \varphi_2 f_2 + \dots + \varphi_n f_n = 0. \tag{12}$$

— Observons d'abord que la quantité L_k est invariante au sens de la théorie des formes algébriques. Car la quantité

$$\mathfrak{A}_{11}\frac{\partial f_1}{\partial y_1}+\cdots+\mathfrak{A}_{1n}\frac{\partial y_n}{\partial f_1}$$

est invariante comme étant le déterminant fonctionnel des formes $f_1 f_2 \dots f_n$. Il en est donc de même de sa puissance d'ordre k et aussi de la quantité L_k que l'on obtient en remplaçant, dans cette puissance, le système transformable des produits de dérivées

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\right)^{p_1}\cdots\left(\frac{\partial f_1}{\partial y_n}\right)^{p_n}$$

par le système cogrédient des dérivées multiples correspondantes

$$\frac{\partial^k f_1}{\partial y_1^{p_1}\dots\partial y_n^{p_n}}.$$

Cela étant, comme les mineurs $\mathfrak{A}_{11}\dots\mathfrak{A}_{1n}$ ne sont pas tous nuls, supposons, comme il est toujours permis, $\mathfrak{A}_{11}\neq 0$.

Alors les équations

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= y_1\\ Y_2 &= a_{21}y_1+\cdots+a_{2n}y_n\\ &\cdots\cdots\cdots\\ Y_n &= a_{n1}y_1+\cdots+a_{nn}y_n \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

sont résolubles par rapport à $y_1 y_2 \dots y_n$, car le déterminant des coefficients est

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \mathfrak{A}_{11}\neq 0.$$

Les équations (13) définiront donc une substitution linéaire inverse

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= Y_1 \\ y_2 &= a'_{21}Y_1 + \cdots + a'_{2n}Y_n \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= a'_{n1}Y_1 + \cdots + a'_{nn}Y_n \end{aligned}\right\}. \tag{14}$$

Effectuons la substitution (14) et désignons par $f'_1 \dots f'_n$ $\mathfrak{A}'_{11} \dots \mathfrak{A}'_{1n}$ L'_k les transformées des quantités $f_1 \dots f_n$ $\mathfrak{A}_{11} \dots$ $\mathfrak{A}_{1n}$ L_k.

On aura d'abord

$$f'_1 = \sum_{p_1 + \cdots p_n = k} a'_{p_1 \dots p_n} Y_1^{p_1} \dots Y_n^{p_n}, \tag{15}$$

les $a'_{p_1 \dots p_n}$ étant les transformées des $a_{p_1 \dots p_n}$,

Puis, comme on le voit immédiatement

$$f'_i = Y_i \qquad (i = 2, 3 \dots n). \tag{16}$$

De là résulte que les $\mathfrak{A}'_{1i}$, qui sont les mineurs relatifs à la première ligne du transformé du déterminant (10), ont pour valeurs

$$\mathfrak{A}_{11} = 1 \qquad \mathfrak{A}_{1i} = 0 \qquad (i = 2, 3 \dots n),$$

et ainsi on a

$$L'_k = \left(\mathfrak{A}'_{11} \frac{\partial f'_1}{\partial Y_1} + \cdots \mathfrak{A}'_{1n} \frac{\partial f'_1}{\partial Y_n} \right)^{k)} = \frac{\partial^k f'_1}{\partial Y_1^k}.$$

D'ailleurs, l'invariant L'_k ne diffère de L_k que par un facteur numérique non nul et $\frac{\partial^k f'_1}{\partial Y_1^k}$ est aussi à un facteur numérique près $a'_{k\,0 \dots 0}$.

D'après les conditions de l'énoncé, on a $L_k = 0$; on a donc aussi $L'_k = 0$, ou encore $a'_{k\,0 \dots 0} = 0$.

Ainsi, dans l'expression (15) de f'_1, tous les termes contiennent en facteur l'une au moins des variables $Y_2 \dots Y_n$.

On pourra donc écrire, et même en général d'une infinité de façons différentes, f'_1 sous la forme

$$f'_1 = -\varphi'_2 Y_2 - \dots - \varphi'_n Y_n$$

ou encore, à cause de (16),

$$f'_1 = -\varphi'_2 f'_2 - \dots - \varphi'_n f'_n, \qquad (17)$$

$\varphi'_2 \dots \varphi'_n$ étant des polynômes homogènes de degré $k-1$ en $Y_1 \dots Y_n$.

Si maintenant dans l'identité (17) on revient aux variables $y_1 \dots y_n$ par la substitution (13) inverse de (14), $f'_1 \dots f'_n$ se transformeront en $f_1 \dots f_n$, et les polynômes homogènes $\varphi'_2 \dots \varphi'_n$ de degré $k-1$ en $Y_1 \dots Y_n$ deviendront des polynômes homogènes $\varphi_2 \dots \varphi_n$ de degré $k-1$ en $y_1 \dots y_n$.

Par suite, on aura l'identité

$$f_1 + \varphi_2 f_2 + \dots + \varphi_n f_n = 0,$$

ce qui est la propriété annoncée.

18. Théorème V. — Considérons n fonctions des variables $y_1 \dots y_n \; x_1 \dots x_s$:

$$F_i(y_1 \dots y_n \; x_1 \dots x_s), \quad (i = 1, 2 \dots n) \qquad (18)$$

holomorphes dans le domaine du point $y_1 = \dots = y_n = x_1 = \dots = x_s = 0$ (point zéro), et supposons que l'un au moins des mineurs $\mathfrak{A}_{11} \dots \mathfrak{A}_{1n}$ relatifs à la première ligne du jacobien

$$J_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

reste différent de zéro au point zéro.

Si alors la quantité

$$L_k = \left(\mathfrak{A}_{11} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \cdots + \mathfrak{A}_{1n} \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \right)^{k)}$$

est nulle en $y_1 = \ldots y_n = x_1 = \ldots x_s = 0$, il est possible de trouver $n-1$ polynômes $\varphi_2 \ldots \varphi_n$ homogènes de degré $k-1$ en $y_1 \ldots y_n$ et à coefficients constants, de telle manière que les dérivées

$$\frac{\partial^k F_1'}{\partial y_1^{p_1} \ldots \partial y_n^{p_n}} \quad (p_1 + \cdots + p_n = k)$$

de la fonction

$$F_1' = F_1 + \varphi_2 F_2 + \cdots + \varphi_n F_n$$

s'annulent au point zéro.

— Ce théorème se déduit aisément du précédent.

Les fonctions F_i étant holomorphes dans le domaine de $y_1 = \ldots y_n = x_1 = \ldots = x_s = 0$ admettent des développements

$$F_i = \sum_{p_1 + \cdots p_n = 0}^{\infty} A^i_{p_1 \ldots p_n} y_1^{p_1} \ldots y_n^{p_n}, \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

et il en est de même pour les combinaisons linéaires des fonctions F à coefficients polynomiaux. Dans ces développements, les A sont des fonctions holomorphes des x dans le domaine de $x_1 = \ldots x_s = 0$.

Comme les dérivées

$$\frac{\partial^{p_1 + \cdots + p_n} F}{\partial y_1^{p_1} \ldots \partial y_n^{p_n}},$$

rapportées au point zéro, ne diffèrent que par un coefficient numérique des coefficients $(A_{p_1 \ldots p_n})_0$ correspondants, notre théorème sera démontré si nous prouvons qu'il existe une combinaison linéaire

$$F_1' = F_1 + \varphi_2 F_2 + \cdots + \varphi_n F_n \qquad (19)$$

telle que les coefficients des termes de degré k en $y_1 \ldots y_n$, dans son développement, s'annulent en $x_1 = \ldots = x_s = 0$.

D'ailleurs, les polynômes $\varphi_2 \dots \varphi_i \dots \varphi_n$ $(i > 1)$ devant être de degré $k - 1$, les seuls termes de degré k des produits $\varphi_i F_i$ seront fournis par les termes du premier degré des F_i. On pourra donc, au point de vue de l'étude des termes de degré k de F_1', limiter les F_i pour $i > 1$ aux termes du premier degré de leurs développements en $y_1 \dots y_n$, et ne considérer dans F_1 que les termes de degré k.

Appelons donc f_1 l'ensemble des termes de degré k de F_1, et f_i les termes du premier degré de F_i pour $i > 1$, les fonctions $F_1 \dots F_n$ étant déjà rapportées à $x_1 = \dots = x_s = 0$.

Il est visible que la valeur de L_k pour le point zéro ne dépend que des parties $f_1 \dots f_n$ des fonctions $F_1 \dots F_n$. Or, comme par hypothèse $(L_k)_0 = 0$, en vertu du théorème précédent (§ 17) on peut trouver $n - 1$ polynômes homogènes de degré $k - 1$ en $y_1 \dots y_n$ donnant identiquement

$$f_1 + \varphi_2 f_2 + \dots + \varphi_n f_n = 0. \qquad (20)$$

Si l'on porte les polynômes φ ainsi déterminés dans la formule (19), la fonction F_1' jouira, d'après (20), de la propriété que les coefficients des termes de degré k de son développement s'annulent pour $x_1 = \dots x_s = 0$, et d'après ce qui a été dit ci-dessus, cette propriété équivaut au théorème annoncé.

Remarque. — Il y a lieu d'observer que les coefficients des termes de degrés inférieurs à $k - 1$ dans les développements de F_1 et F_1' sont identiques, ce qui revient à dire que les valeurs des dérivées en $y_1 \dots y_n$ d'ordres inférieurs à $k - 1$, de F_1 et F_1' sont égales en $y_1 = \dots = y_n = 0$.

De plus, on voit facilement qu'il en est de même pour les dérivées d'ordre $k - 1$, au point $y_1 = \dots = y_n = x_1 = \dots = x_s = 0$ si les fonctions F_i s'annulent en ce point.

19. Théorème VI. — Considérons encore le système de fonctions

$$F\ (y_1 \dots y_n\ x_1 \dots x_s) \qquad (i = 1, 2 \dots n)$$

holomorphes en $y_1 = \dots y_n = x_1 = \dots = x_s = 0$ et supposons

toujours que l'un au moins des mineurs $\mathcal{A}_{11} \dots \mathcal{A}_{1n}$ du jacobien J_1 reste différent de zéro au point zéro.

Si alors, en ce point zéro, on a

$$\left.\begin{aligned}(F_1)_0 = 0 \dots (F_n)_0 &= 0\\ (J_1)_0 = 0 \dots (J_{p-1})_0 &= 0,\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

on peut trouver une fonction Φ de la forme

$$\Phi = F_1 + \lambda_2 F_2 + \dots + \lambda_n F_n,$$

les λ étant des polynômes entiers en $y_1 \dots y_n$ de degrés au plus égaux à $p - 2$ et à coefficients constants, de telle manière que toutes les dérivées $\frac{\partial^{p_1 + \dots p_n}\Phi}{\partial y_1^{p_1} \dots \partial y_n^{p_n}}$, d'ordres inférieurs à p, s'annulent au point zéro.

De plus, on aura au point zéro

$$(J_p)_0 = \left(\mathcal{A}_{11}\frac{\partial\Phi}{\partial y_1} + \dots + \mathcal{A}_{1n}\frac{\partial\Phi}{\partial y_n}\right)_0^{p)}. \tag{22}$$

— Plaçons-nous d'abord dans un cas particulier : supposons que toutes les dérivées de F_1 en $y_1 \dots y_n$, d'ordres inférieurs à h s'annulent au point zéro. Il est facile de voir qu'alors

$$(J_h)_0 = \left(\mathcal{A}_{11}\frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \dots + \mathcal{A}_{1n}\frac{\partial F_1}{\partial y_n}\right)_0^{h)}. \tag{23}$$

En effet, on a

$$J_1 = \sum_{i_1=1}^{n} \mathcal{A}_{1i_1}\frac{\partial F_1}{\partial y_{i_1}}$$

$$J_2 = \sum_{i_2=1}^{n} \mathcal{A}_{1i_2}\frac{\partial J_1}{\partial y_{i_2}},$$

c'est-à-dire

$$J_2 = \sum_{i_1}\sum_{i_2} \mathcal{A}_{1i_1}\mathcal{A}_{1i_2}\frac{\partial^2 F_1}{\partial y_{i_1}\partial y_{j_2}} + \text{termes en } \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

et, en général,

$$J_h = \sum_{i_1} \sum_{i_2} \cdots \sum_{i_h} \mathcal{A}_{1i_1} \dots \mathcal{A}_{1i_h} \frac{\partial^h F_1}{\partial y_{i_1} \dots \partial y_{i_h}} + \left\{ \begin{array}{l} \text{termes en dérivées } \dfrac{\partial^{\cdots} F_1}{\partial y_{i''} \dots \partial y_{n''}} \\ \text{d'ordres inférieurs à } h. \end{array} \right.$$

Or, d'après notre hypothèse, toutes les dérivées $\frac{\partial^{\cdots} F_1}{\partial y_1^{\cdots} \dots \partial y_n^{\cdots}}$ d'ordres inférieurs à h s'annulent au point zéro; donc

$$(J_h)_0 = \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_h} \left(\mathcal{A}_{1i_1} \dots \mathcal{A}_{1i_h} \frac{\partial^h F_1}{\partial y_{i_1} \dots \partial y_{i_h}} \right)_0,$$

ce qui, avec le symbolisme que nous avons adopté, n'est autre chose que la relation (23).

Cette remarque, jointe aux théorèmes III et V, va maintenant nous permettre d'établir aisément notre énoncé.

D'après le théorème V (§ 18), il existe toujours une combinaison linéaire à coefficients polynomiaux :

$$F_1' = F_1 + \varphi_2^h F_2 + \cdots + \varphi_n^h F_n \qquad (24)$$

telle que les dérivées

$$\frac{\partial^h F_1'}{\partial y_1^{p_1} \dots \partial y_n^{p_n}} \quad (p_1 + \cdots + p_n = h)$$

s'annulent toutes au point zéro, pourvu que l'on ait, pour le système $(F_1 \dots F_n)$,

$$\left(\mathcal{A}_{11} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \cdots + \mathcal{A}_{1n} \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \right)_0^{h)} = 0.$$

D'après le théorème III (§ 16), les quantités $(J_1)_0$ $(J_2)_0 \dots (J_p)_0$ demeurent inaltérées lorsqu'on remplace F_1 par la fonction F_1', pourvu que, pour le système $(F_1 \dots F_n)$, les relations (21) soient satisfaites.

Or, dans le cas qui nous occupe, on a, d'après les hypothèses de l'énoncé,

$$(J_1)_0 = \left(\mathcal{A}_{11} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \cdots + \mathcal{A}_{1n} \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \right)_0 = 0.$$

Donc il existe une transformation (24), telle que les dérivées premières $\frac{\partial F_1'}{\partial y}$ s'annulent au point zéro.

En admettant, pour éviter la trop grande multiplicité des notations, que les fonctions $F_1 \ldots F_n$ ont déjà subi éventuellement cette transformation, nous pourrons supposer, comme plus haut, que les dérivées $\frac{\partial^{\cdots} F_1}{\partial y_1^{\cdots} \ldots \partial y_n^{\cdots}}$ d'ordres inférieurs à h s'annulent toutes pour le point zéro. Mais alors, d'après (23)

$$(J_n)_0 = \left(\mathcal{A}_{11} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \cdots + \mathcal{A}_{1n} \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \right)_0^{h)}$$

et si $h < p$, on aura d'après l'énoncé $(J_h)_0 = 0$; c'est-à-dire qu'il existera encore une transformation (24) telle que les dérivées d'ordre h de F_1' s'annulent toutes au point zéro. Mais d'après la remarque du § 18, cette transformation n'altère pas la valeur au point zéro des dérivées d'ordre inférieur à h de F_1, et ainsi les dérivées de F_1' s'annulent toutes, jusqu'à l'ordre h inclus, au point zéro.

Si l'on a encore $(J_{h+1})_0 = 0$, on fera usage d'une nouvelle transformation (24), et en continuant de même, on arrivera finalement à une fonction Φ dont toutes les dérivées en $y_1 \ldots y_n$, d'ordres inférieurs à p, s'annuleront au point zéro.

De plus, comme le produit de deux transformations telles que (24) est une transformation de même nature, on aura

$$\Phi = F_1 + \lambda_2 F_2 + \cdots + \lambda_n F_n, \qquad (25)$$

où les λ_i seront les sommes des polynômes φ_i correspondant aux différentes transformations (24) que l'on aura utilisées.

Comme, d'après le théorème V (§ 18), les φ^h sont des poly-

nômes homogènes de degré $h-1$, on voit que les λ seront des polynômes entiers en $y_1 \dots y_n$ de degrés $p-2$ au plus.

Enfin, la relation (22) de l'énoncé résulte immédiatement de ce que, les relations (21) étant satisfaites, $(J_p)_0$ n'est pas altéré, en vertu du théorème III, si l'on remplace F_2 par Φ, et de ce que pour la fonction Φ on peut appliquer la formule (23) pour $h = p$.

Généralisation du lemme de Weierstrass.

20. Nous sommes maintenant en mesure d'établir la généralisation du lemme de Weierstrass que nous avons en vue et que nous énoncerons comme suit :

Théorème VII. — Soient

$$F_i(y_1 \dots y_n\ x_1 \dots x_s) \qquad (i = 1\ 1, 2 \dots n)$$

n fonctions holomorphes au point $y_1 = \dots = y_n = x_1 = \dots = x_s = 0$ (point zéro), où elles s'annulent.

Si ces fonctions ont pour $x_1 = \dots = x_s = 0$ un zéro d'ordre p (*) en $y_1 = \dots = y_n = 0$, on pourra écrire identiquement, dans le domaine du point zéro, des relations de la forme

$$F_i = K_{i1}H_1 + \dots + K_{in}H_n, \qquad (i = 1, 2 \dots n), \qquad (26)$$

les K étant des fonctions holomorphes de $y_1 \dots y_n\ x_1 \dots x_s$ dont le déterminant est différent de zéro au point zéro, et les H étant des polynômes entiers en $y_1 \dots y_n$ de degrés au plus égaux à p, et à coefficients holomorphes en $x_1 \dots x_s$.

— Reportons-nous à la définition donnée au § 15, du zéro d'un système de fonctions. Pour que le système $(F_1 \dots F_n)$ ait

(*) De première espèce. (Voir la note du § 15.)

en $x_1 = \ldots = x_s = 0$ un zéro d'ordre p en $y_1 = \ldots = y_n = 0$, il faut d'abord que l'un au moins des mineurs du déterminant fonctionnel J_1 ne soit pas nul au point zéro; en faisant éventuellement une permutation sur les indices des fonctions F et des variables y, nous pourrons toujours supposer

$$(\mathfrak{A}_{11})_0 \neq 0. \tag{27}$$

De plus, il faut encore avoir (§ 15)

$$(J_1)_0 = \cdots (J_{p-1})_0 = 0, \tag{28}$$

mais

$$(J_p)_0 \neq 0. \tag{29}$$

Cela étant, on observera tout de suite que si le théorème est démontré pour un système $(F'_1 \ldots F'_n)$ équivalent à $(F_1 \ldots F_n)$ (*), il le sera par le fait même, pour le système $(F_1 \ldots F_n)$. Car, par la définition des systèmes équivalents, les F_i seront des combinaisons linéaires des F' dont le déterminant des coefficients ne sera pas nul au point zéro; par la supposition faite, les F' seront aussi des combinaisons linéaires des H dont le déterminant des coefficients sera différent de zéro, et d'après une propriété bien connue des substitutions linéaires, il en sera donc de même pour l'expression des F en fonction des H.

Nous pourrons donc d'après cela, remplacer le système $(F_1 \ldots F_n)$ par le système équivalent $(\Phi F_2 \ldots F_n)$, où

$$\Phi = F_1 + \lambda_2 F_2 + \cdots + \lambda_n F_n, \tag{30}$$

les λ étant holomorphes au point zéro.

Or, comme actuellement, les fonctions $F_1 \ldots F_n$ s'annulent au point zéro, d'après le théorème précédent (§ 19), on peut, à cause de (28), trouver une fonction Φ de la forme (30) telle

(*) Mais en partant, bien entendu, des conditions (28) et (29) relatives au système $(F_1 \ldots F_n)$.

que toutes les dérivées $\frac{\partial^{p_1+\cdots+p_n}\Phi}{\partial y_1^{p_1}\ldots\partial y_n^{p_n}}$, d'ordres inférieurs à p, s'annulent au point zéro. De plus, moyennant l'emploi de cette fonction Φ, on peut écrire

$$(J_p)_0 = \left(\mathfrak{A}_{11}\frac{\partial\Phi}{\partial y_1} + \cdots + \mathfrak{A}_{1n}\frac{\partial\Phi}{\partial y_n}\right)_0^{p)} \cdot \qquad (31)$$

Pour éviter la trop grande multiplicité des notations, nous supposerons que le système $(F_1 \ldots F_n)$ a déjà subi la transformation équivalente que nous venons d'indiquer, et ainsi le système $(F_1 \ldots F_n)$ jouira des propriétés suivantes :

1° Les F sont holomorphes et s'annulent au point zéro ;

2° On a

$$\left(\frac{\partial^{p_1+\cdots p_n}F_1}{\partial y_1^{p_1}\ldots\partial y_n^{p_n}}\right)_0 = 0 \qquad \text{pour} \qquad p_1+\cdots+p_n < p ; \qquad (32)$$

3° A cause de (31) et de (29), on a aussi

$$\left(\mathfrak{A}_{11}\frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \cdots + \mathfrak{A}_{1n}\frac{\partial F_1}{\partial y_n}\right)_0^{p)} \neq 0 \qquad (33)$$

et l'on suppose, d'après (27),

$$(\mathfrak{A}_{11})_0 \neq 0. \qquad (34)$$

Actuellement, considérons le système d'équations

$$F_1 = 0 \ldots F_n = 0 \qquad (35)$$

dans le domaine du point zéro.

Nous allons ramener ce système à un système d'équations algébriques entières en $y_1 \ldots y_n$, à coefficients holomorphes en $x_1 \ldots x_s$.

Comme

$$(\mathcal{A}_{11})_0 = \frac{\partial(F_2 \dots F_n)}{\partial(y_2 \dots y_n)_0} \neq 0,$$

le système des $\overline{n-1}$ dernières équations (35) :

$$F_2 = 0 \dots F_n = 0, \tag{36}$$

vérifié pour le point zéro, définira dans le domaine de zéro, d'après le théorème des fonctions implicites, un et un seul système de fonctions

$$y_2 = \psi_2(y_1 x_1 \dots x_s) \dots y_n = \psi_n(y_1 x_1 \dots x_s) \tag{37}$$

holomorphes dans le domaine du point zéro et s'annulant en ce point.

On aura donc identiquement

$$F_i(y_1 \psi_2 \dots \psi_n x_1 \dots x_s) = 0 \qquad (i = 2, 3 \dots n) \tag{38}$$

et au point de vue de la recherche des solutions du système (35) dans le domaine de zéro, il sera équivalent de considérer le système

$$F_1(y_1 \dots y_n \; x_1 \dots x_s) = 0, \quad y_2 - \psi_2 = 0 \dots y_n - \psi_n = 0$$

ou encore le système

$$\left.\begin{aligned} G(y_1 x_1 \dots x_s) = F_1(y_1 \psi_2 \dots \psi_n \; x_1 \dots x_s) = 0 \\ y_i - \psi_i = 0 \quad (i = 2, 3 \dots n). \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

La fonction $G(y_1 x_1 \dots x_s)$ est holomorphe et s'annule en $y_1 = x_1 = \dots = x_s = 0$. De plus, en indiquant par $[\mathcal{F}]$ que l'on doit remplacer dans une expression $\mathcal{F}$, $y_2 \dots y_n$ par $\psi_2 \dots \psi_n$, on a

$$\frac{\partial G}{\partial y_1} = \left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial y_n}\cdot\frac{\partial \psi_n}{\partial y_1}\right)\right]$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial y_1^2} = \left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial y_n}\cdot\frac{\partial \psi_n}{\partial y_1}\right)^2\right] + \text{termes en } \left[\frac{\partial F_1}{\partial z}\right]$$

et, en général,

$$\frac{\partial^k G}{\partial y_1^k} = \left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial y_n}\cdot\frac{\partial \psi_n}{\partial y_1}\right)^{k)}\right]$$

$$+ \left\{\text{termes en dérivées } \left[\frac{\partial^{\dots} F_1}{\partial y_1^{\dots} \dots \partial y_n^{\dots}}\right] \text{ d'ordres inférieurs à } k.\right.$$

A cause de (32), il résulte de la dernière relation, pour $y_1 = \dots = y_n = x_1 = \dots = x_s = 0$,

$$\left(\frac{\partial^k G}{\partial y_1^k}\right)_0 = 0 \qquad \text{pour} \qquad k = 1, 2 \dots \overline{p-1}$$

et

$$\left(\frac{\partial^p G}{\partial y_1^p}\right)_0 = \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial y_n}\cdot\frac{\partial \psi_n}{\partial y_1}\right)_0^{p)}. \qquad (40)$$

Mais, des identités (38), on déduit aussi

$$\left[\frac{\partial F_i}{\partial y_1}\right] + \left[\frac{\partial F_i}{\partial y_2}\right]\frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} + \dots + \left[\frac{\partial F_i}{\partial y_n}\right]\frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} = 0 \quad (i = 2, 3 \dots n),$$

équations que l'on résoud immédiatement sous la forme

$$[\mathcal{A}_{11}]\frac{\partial \psi_i}{\partial y_1} = [\mathcal{A}_{1i}] \qquad (i = 2, 3 \dots n)$$

et ainsi, au point zéro, on a, à cause de (34),

$$\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial y_1}\right)_0 = \left(\frac{\mathcal{A}_{1i}}{\mathcal{A}_{11}}\right)_0$$

et, par suite, d'après (40) et (33),

$$\left(\frac{\partial^p G}{\partial y_1^p}\right)_0 = \frac{1}{(\mathcal{A}_{11})_0^p}\left(\mathcal{A}_{11}\frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \dots + \mathcal{A}_{1n}\frac{\partial F_1}{\partial y_n}\right)_0^{p)} \neq 0.$$

Il résulte de ce qui précède, et du lemme de Weierstrass,

que dans le domaine de zéro la première équation (39) peut s'écrire identiquement

$$G = (y_1^0 + b_1 y_1^{p-1} + \cdots + b_p)\, K, \tag{41}$$

les coefficients b étant holomorphes et s'annulant en $x_1 = \ldots = x_s = 0$ et K étant une fonction holomorphe de $y_1 x_1 \ldots x_s$ différente de zéro au point zéro.

Par suite, si l'on pose

$$H_1 = y_1^p + b_1 y_1^{p-1} + \cdots + b_p, \tag{42}$$

l'équation $G = 0$ entraîne $H_1 = 0$ et ainsi le système (35) est dans le domaine de zéro équivalent, au point de vue des solutions, au système

$$H_1 = 0, \quad y_i = \psi_i (y_1 x_1 \ldots x_s) \quad (i = 2, 3 \ldots n). \tag{43}$$

Mais actuellement, nous pouvons appliquer aux fonctions ψ_i le corollaire du Théorème I (§ 10) et écrire

$$\psi_i (y_i x_1 \ldots x_s) = \varphi_i^1 y_1^{p-1} + \cdots + \varphi_i^p + H_1 \lambda_i \quad (i = 2, 3 \ldots n), \tag{44}$$

les φ étant des fonctions holomorphes de $x_1 \ldots x_s$ et λ_i une fonction holomorphe de $y_1 x_1 \ldots x_s$. Alors, en posant

$$\left.\begin{array}{l} H_i = y_i - \varphi_i \\ \text{moyennant} \\ \varphi_i = \varphi_i^1 y_1^{p-1} + \cdots + \varphi_i^p \end{array}\right\} (i = 2, 3 \ldots n), \tag{45}$$

les solutions du système (43) et, par conséquent, celles du système (35), seront, dans le domaine de zéro, solutions du système

$$H_1 = \ldots H_n = 0, \tag{46}$$

qui est algébrique entier en $y_1 \ldots y_n$ et à coefficients holomorphes en $x_1 \ldots x_s$.

Inversement, il est visible que toute solution de (46) sera solution de (43) et ainsi de (35).

Le théorème annoncé va maintenant se déduire aisément du résultat précédent, par applications répétées du corollaire du Théorème I (§ 10), qui vient encore de nous servir.

En effet, dans (45) les φ_i sont des fonctions holomorphes de $y_1 x_1 \dots x_s$, qui s'annulent nécessairement au point zéro, puisque $(H_i)_0 = 0$. En appliquant le corollaire rappelé pour $p = 1$, on aura donc identiquement dans le domaine de zéro

$$F_l(y_1 \dots y_n\ x_1 \dots x_s) = F'_l(y_1 \dots y_{n-1}\ x_1 \dots x_s) + H_n K_{ln} \quad (l = 1, 2 \dots n),$$

F'_l étant une fonction holomorphe ne dépendant plus de y_n. En opérant de même sur F'_l et faisant successivement usage de $H_{n-1} \dots H_3 H_2$, on voit qu'on arrivera finalement à une expression

$$F_l(y_1 \dots y_n\ x_1 \dots x_s) = F_l^{n-1}(y_1 x_1 \dots x_s) + H_2 K_{l2} + \dots + H_n K_{ln} \quad (l = 1, 2 \dots n),$$

tous les K_{li} et F_l^{n-1} étant holomorphes, mais F_l^{n-1} ne dépendant plus de $y_2 \dots y_n$.

Finalement, en faisant usage du polynôme H_1 (formule 42), on écrira

$$\left.\begin{aligned} F_l(y_1 \dots y_n\ x_1 \dots x_s) = f_l^1 y_1^{p-1} + \dots + f_l^p + H_1 K_{l1} + \dots + H_n K_{ln} \\ (l = 1, 2 \dots n), \end{aligned}\right\} \quad (47)$$

les f étant holomorphes et ne dépendant plus que de $x_1 \dots x_s$.

On peut voir que les f sont identiquement nuls.

Car, d'après ce qui précède, les équations $H_1 = 0 \dots H_n = 0$ entraînent $F_l = 0$ ($l = 1, 2, \dots n$), c'est-à-dire, d'après (47),

$$f_l^1 y_1^{p-1} + \dots + f_l^p = 0 \qquad (l = 1, 2 \dots n) \qquad (48)$$

et ainsi, pour tout système $x_1 \dots x_s$, toute racine y_1 de l'équation de degré p

$$H_1 = 0$$

devra être racine de l'équation (48) de degré $p - 1$. Cela ne

peut avoir lieu, si les racines de $H_1 = 0$ sont toutes différentes, que si l'on a

$$f_1^1 = 0 \dots f_1^p = 0. \qquad (49)$$

D'ailleurs, il est évident que l'équation $H_1 = 0$ peut avoir toutes ses racines différentes, et comme l'équation (48) a été formée indépendamment de la nature des racines de $H_1 = 0$, le résultat (49) subsiste dans tous les cas.

Par (47) et (49), on a donc identiquement dans le domaine de zéro

$$F_i(y_1 \dots y_n \; x_1 \dots x_s) = K_{i1}H_1 + \dots + K_{in}H_n, \quad (i = 1, 2 \dots n), \quad (49')$$

les K étant holomorphes, ce qui établit les relations (26) de l'énoncé.

Pour achever la démonstration de notre théorème, il nous reste à montrer que le déterminant Δ des K est différent de zéro au point zéro.

Dérivons les identités (49') par rapport à y_i $(i = 2, 3 \dots n)$ et considérons le résultat au point zéro. Nous aurons, à cause des expressions (45) des H,

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_i}\right)_0 = (K_{i1})_0 \qquad (i = 2, 3 \dots n)$$

et ainsi, à cause de (32),

$$\Delta = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{vmatrix}_0 = \begin{vmatrix} (K_{11})_0^2 & 0 & \dots & 0 \\ (K_{21})_0 & \left(\frac{\partial F_2}{\partial y_2}\right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial F_2}{\partial y_n}\right)_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (K_{n1})_0 & \left(\frac{\partial F_n}{\partial y_2}\right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial F_n}{\partial y_n}\right)_0 \end{vmatrix} = (K_{11})_0 (\mathfrak{A}_{11})_0. \qquad (50$$

Comme on a $(\mathfrak{A}_{11})_0 \neq 0$, on aura $\Delta_0 \neq 0$, si $(K_{11})_0 \neq 0$.

Il reste donc à calculer $(K_{11})_0$.

On pourrait obtenir cette quantité en dérivant l'identité (49′) pour $l = 1$, p fois par rapport à y_1 ; mais il est beaucoup plus simple d'opérer comme il suit :

Au lieu de faire directement $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = x_1 = \ldots = x_s = 0$ dans K_{11}, nous pouvons d'abord, d'après (45), faire $y_i = \varphi_i$ $(i = 2, 3 \ldots n)$, puis $y_1 = x_1 = \ldots = x_s = 0$.

Faisons $y_i = \varphi_i$ dans l'identité (49′) prise pour $l = 1$. A cause de (45), nous aurons identiquement dans le domaine de $y_1 = x_1 = \ldots x_s = 0$

$$F_1(y_1\varphi_2 \ldots \varphi_n \; x_1 \ldots x_3) = K_{11}(y_1\varphi_2 \ldots \varphi_n \; x_1 \ldots x_s) \cdot H_1. \qquad (51)$$

Mais, par (44) et (45), on a identiquement

$$\varphi_i = \psi_i - H_1\lambda_i, \qquad (i = 2, 3 \ldots n)$$

et ainsi, par (51),

$$K_{11}(y_1\varphi_2 \ldots \varphi_n \, x_1 \ldots x_3) \cdot H_1 = F_1(y_1, \psi_2 - H_1\lambda_2, \ldots \psi_n - H_n\lambda_n, x_1 \ldots x_s).$$

Dans le domaine de zéro, le second membre de cette relation pourra être développé en série des puissances de $H_1\lambda_2 \ldots H_1\lambda_n$, et avec la notation [ ] que nous avons déjà employée, l'identité précédente s'écrira

$$\left.\begin{aligned} K_{11}(y_1\varphi_2 \ldots \varphi_n \; x_1 \ldots x_s) \cdot H_1 &= F_1(y_1\psi_2 \ldots \psi_n \; x_1 \ldots x_s) \\ - H_1\left(\lambda_2\left[\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\right] + \cdots\right) &+ \text{termes en } H_1^2, H_1^3 \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (53)$$

Mais, d'après (39),

$$F_1(y_1\psi_2 \ldots \psi_n \; x_1 \ldots x_3) = G$$

et, d'après (41) et (42),

$$G = H_1K,$$

K étant holomorphe différent de zéro au point zéro.

Donc l'identité (53) peut encore s'écrire

$$K_{11}(y_1\varphi_2 \dots \varphi_n\, x_1 \dots x_s)\, H_1 = H_1 K - H_1\left(\lambda_2\left[\frac{\partial F_1}{\partial y_2}\right] + \cdots\right) + \text{termes en } H_1^2, H_1^3 \dots$$

et si H_1 est différent de zéro,

$$K_{11}(y_1\varphi_2 \dots \varphi_n\; x_1 \dots x_s) = K - \left(\lambda_2\left[\frac{\partial F_1}{\partial y_2}\right] + \cdots\right) + \text{termes en } H_1, H_1^2 \dots$$

D'ailleurs, toutes les fonctions intervenant dans la dernière identité étant holomorphes et, par suite, continues, cette identité subsistera encore si $H_1 = 0$. En particulier, au point $y_1 = x_1 = \dots = x_s = 0$ on aura

$$(K_{11})_0 = (K)_0' - \left\{ (\lambda_2)_0 \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_2}\right) + \cdots (\lambda_n)_0 \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_n}\right)_0 \right\}$$

ou encore, à cause de (32),

$$(K_{11})_0 = (K)_0.$$

Comme $(K)_0$ est différent de zéro, on aura bien, d'après (50),

$$\Delta_0 \neq 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

21. *Cas où le théorème précédent ne s'applique pas.* — Lorsque l'un des mineurs $\mathfrak{h}_{11}$ est différent de zéro au point zéro, le seul cas où le théorème précédent ne peut pas s'appliquer est celui où les quantités

$$(J_k)_0, \qquad (k = 1, 2, 3 \dots)$$

sont nulles pour toute valeur de k.

Ce cas d'exception est entièrement semblable à celui qui se présente pour une seule fonction $F(y x_1 \dots x_s)$ quand toutes les dérivées $\frac{\partial^k F}{\partial y^k}$ s'annulent au point zéro; il s'y réduit, en effet, si le

système $(F_1 \dots F_n)$ se réduit à la seule fonction F, car on a alors (§ 15)

$$J_k = \frac{\partial^k F}{\partial y^k}.$$

Dans le cas d'une seule fonction, on a maintenant

$$F(y x_1 \dots x_s) = 0 \quad \text{pour} \quad x_1 = \dots = x_s = 0,$$

quel que soit y.

De même, nous allons montrer que dans le cas de n fonctions $F_1 \dots F_n$, avec $(J_k)_0 = 0$, quel que soit k, et $(\mathfrak{A}_{11})_0 \neq 0$, on peut satisfaire aux équations

$$F_1 = 0 \dots F_n = 0$$

rapportées à $x_1 = \dots = x_s = 0$, en prenant y_1 arbitrairement (mais voisin de zéro) et pour $y_2 \dots y_n$ des fonctions holomorphes de y_1.

D'abord, à cause de $(\mathfrak{A}_{11})_0 \neq 0$, on peut écrire dans le domaine de zéro, en vertu du théorème précédent,

$$\left.\begin{aligned} F_2 &= K'_{22}(y_2 - \psi_2) + \dots + K'_{2n}(y_n - \psi_n) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n &= K'_{n2}(y_2 - \psi_2) + \dots + K'_{n}(y_n - \psi_n) \end{aligned}\right\} \qquad (54)$$

les ψ étant les fonctions considérées plus haut (formules 37) et les K′ étant des fonctions holomorphes dont le déterminant est différent de zéro. Dans le domaine de zéro, le système (54) pourra donc se résoudre sous la forme

$$\left.\begin{aligned} y_2 - \psi_2 &= L_{22}F_2 + \dots + L_{2n}F_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n - \psi_n &= L_{n2}F_2 + \dots + L_{nn}F_n, \end{aligned}\right\} \qquad (55)$$

les L étant encore holomorphes.

D'autre part, par applications répétées du corollaire du Théorème I (§ 10), on a identiquement

$$\begin{aligned} F_1(y_1 \dots y_n\ x_1 \dots x_s) &= f_1(y_1 \dots y_{n-1}\ x_1 \dots x_s) + (y_n - \psi_n)\, g_n \\ &= f_2(y_1 \dots y_{n-2}\ x_1 \dots x_3) + (y_{n-1} - \psi_{n-1})\, g_{n-1} + (y_n - \psi_n)\, g_n \\ &= f_{n-1}(y_1 x_1 \dots x_3) + (y_2 - \psi_2)\, g_2 + \dots + (y_n - \psi_n)\, g_n, \end{aligned}$$

les fonctions $f_1 f_2 \dots f_{n-1}$, qu'on obtient successivement, dépendant chaque fois d'une variable y en moins et étant holomorphes ainsi que les fonctions g.

A cause des identités (55), on obtient donc finalement pour F_1 une expression de la forme

$$F_1 = F'(y_1 x_1 \dots x_s) - \lambda_2 F_2 - \dots - \lambda_n F_n, \qquad (56)$$

les λ et F' étant holomorphes, mais F' ne dépendant que de $y_1 x_1 \dots x_s$.

Actuellement, remplaçons le système $(F_1 \dots F_n)$ par le système $(F' F_2 \dots F_n)$ [cette transformation étant une transformation équivalente (§ 13)]; d'après le Théorème III (§ 16), les valeurs des J_k pour le nouveau système seront également toutes nulles au point zéro. Appelons J'_k les expressions des J_k relatives à ce système $(F' F_2 \dots F_n)$. On a, puisque F' ne dépend pas de $y_2 \dots y_n$,

$$J'_1 = \sum_{i_1=1}^{n} \frac{\partial F'}{\partial y_{i_1}} \mathfrak{A}_{1 i_1} = \frac{\partial F'}{\partial y_1} \mathfrak{A}_{11} \qquad (57)$$

$$J'_2 = \sum_{i_2=1}^{n} \mathfrak{A}_{1 i_2} \frac{\partial J'_1}{\partial y_{i_2}} = \frac{\partial^2 F'}{\partial y_1^2} \cdot \mathfrak{A}_{11}^2 + \text{termes en } \frac{\partial F'}{\partial y_1} \qquad (58)$$

et, en général,

$$J'_k = \mathfrak{A}_{11}^k \frac{\partial^k F'}{\partial y_1^k} + \text{termes en } \frac{\partial^h F'}{\partial y_1^h} \text{ pour } h < k. \qquad (59)$$

Or, maintenant, puisque $(J'_k)_0 = 0$, quel que soit k, et que

$(\mathfrak{A}_{11})_0 \neq 0$, on aura successivement, par (57), (58), (59),

$$\left(\frac{\partial F'}{\partial y_1}\right)_0 = 0, \left(\frac{\partial^2 F'}{\partial y_1^2}\right)_0 = 0 \text{ et, en général, } \left(\frac{\partial^h F'}{\partial y_1^h}\right)_0 = 0, \text{ quel que soit } k.$$

Donc, pour $x_1 = \ldots = x_s = 0$, on aura $F' = 0$, quel que soit y_1, et pour

$$y_2 = \psi_2(y_1\, 0 \ldots 0) \ldots y_n = \psi_n(y_1\, 0 \ldots 0) \qquad (60)$$

les équations $F_2 = 0 \ldots F_n = 0$ seront vérifiées.

Comme les systèmes $(F' F_2 \ldots F_n)$ et $(F_1 F_2 \ldots F_n)$ sont équivalents, les valeurs (60) vérifieront aussi, quel que soit y_1, et pour $x_1 = \ldots x_s = 0$, les équations

$$F_1 = 0 \ldots F_n = 0,$$

et ainsi la propriété annoncée se trouve établie.

22. *Invariance de l'ordre du zéro d'un système* $(F_1 \ldots F_n)$ *dans les transformations équivalentes de ce système.* — Nous terminerons en démontrant que l'ordre du zéro d'un système de fonctions $(F_1 \ldots F_n)$ n'est pas altéré quand on remplace ce système par un système $(F_1' \ldots F_n')$ équivalent. Nous avons déjà annoncé cette propriété (§ 15) et nous l'avons démontrée dans un cas particulier (§ 16).

Nous pouvons maintenant l'établir en toute généralité d'une façon bien simple.

Plaçons-nous dans les mêmes conditions que dans l'énoncé du Théorème VII (§ 20). Comme toute transformation équivalente de $(F_1 \ldots F_n)$ est, à cause de (26), une transformation équivalente du système $(H_1 \ldots H_n)$, il nous suffira de démontrer que tout système $(F_1 \ldots F_n)$ équivalent à $(H_1 \ldots H_n)$ a pour $x_1 = \ldots x_s = 0$ un zéro d'ordre p en $y_1 = \ldots = y_n = 0$. Il en résultera, en particulier, que $(H_1 \ldots H_n)$ a en ce point un zéro d'ordre p, ce que l'on peut vérifier directement.

Supposons donc

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= K_{11}H_1 + \cdots + K_{1n}H_n \\ &\cdots\cdots\cdots \\ F_n &= K_{n1}H_1 + \cdots + K_{nn}H_n, \end{aligned}\right\} \qquad (61)$$

les K étant des fonctions holomorphes dont le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} K_{11} \cdots K_{1n} \\ \cdots\cdots \\ K_{n1} \cdots K_{nn} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro au point zéro. En changeant éventuellement l'ordre des fonctions F, nous pourrons toujours supposer que le mineur

$$\delta = \begin{vmatrix} K_{22} \cdots K_{2n} \\ \cdots\cdots \\ K_{n2} \cdots K_{nn} \end{vmatrix} \qquad (62)$$

est différent de zéro au point zéro; ainsi il existera, dans le domaine de zéro, des fonctions holomorphes $\lambda_2 \ldots \lambda_n$ telles que la fonction

$$\Phi = F_1 + \lambda_2 F_2 + \cdots + \lambda_n F_n$$

soit simplement de la forme

$$\Phi = KH_1.$$

De plus, le système $(\Phi F_2 \ldots F_n)$ étant équivalent à $(F_1 \ldots F_n)$, on aura nécessairement

$$(K)_0 \neq 0. \qquad (63)$$

Mais, en vertu du Théorème III (§ 16, corollaire), l'ordre du zéro du système $(F_1 \ldots F_n)$ est le même que celui du système $(\Phi F_2 \ldots F_n)$. Il nous suffit donc d'établir que le système $(\Phi F_2 \ldots F_n)$ a un zéro d'ordre p au point zéro. Or, cette dernière propriété résulte immédiatement de la forme (42) de H_1.

Comme H_1 ne dépend pas de $y_2 \dots y_n$, on a, en effet, pour le système $(\Phi F_2 \dots F_n$

$$J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial K H_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial K H_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = K \frac{\partial H_1}{\partial y_1} \mathcal{A}_{11} + \text{termes en } H_1.$$

De même,

$$J_2 = \sum_i \mathcal{A}_{1i} \frac{\partial J_1}{\partial y_i} = K \mathcal{A}_{11}^2 \frac{\partial^2 H_1}{\partial y_1^2} + \text{termes en } \frac{\partial H_1}{\partial y_1} \text{ et } H_1$$

et, en général,

$$J_k = K \mathcal{A}_{11}^k \frac{\partial^k H_1}{\partial y_1^k} + \text{termes en } \frac{\partial^{k-1} H_1}{\partial y^{k-1}} \dots \frac{\partial H_1}{\partial y_1} \text{ et } H_1. \qquad (64)$$

D'ailleurs, les propriétés de H_1 donnent

$$\left(\frac{\partial^k H_1}{\partial y_1^k}\right)_0 = 0 \text{ pour } k < p, \quad \text{et} \quad \frac{\partial^p H_1}{\partial y_1^p} = p\,! \neq 0.$$

Donc, d'après (64),

$$(J_k)_0 = 0 \quad \text{pour} \quad k = 1, 2 \dots \overline{p-1} \qquad (65)$$

et

$$(J_p)_0 = K_0 (\mathcal{A}_{11})_0^p \, p\,!$$

Mais, comme on le voit facilement, $(\mathcal{A}_{11})_0$ n'est autre chose que le mineur δ_0 (formule 62), lequel n'est pas nul, et ainsi, à cause de (63), on a

$$(J_p)_0 \neq 0. \qquad (66)$$

D'après ce qui précède, les relations (65) et (66) établissent la propriété annoncée.

23. *Remarque finale.* — Les questions traitées dans les pages qui précèdent ont avec la théorie de l'élimination d'intimes attaches.

Ainsi, la quantité L_k (formule 11), qui a joué un rôle important, n'est autre chose que le résultant des formes $f_1 \dots f_n$ du Théorème IV. On peut voir que $L_k = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que les équations homogènes

$$f_1 = 0 \dots f_n = 0$$

admettent une solution différente de zéro, et cela même lorsque tous les mineurs $\mathcal{A}_{11} \dots \mathcal{A}_{1n}$ sont nuls.

D'un autre côté, on peut dire aussi que l'équation $H_1 = 0$ est, dans le domaine de zéro, l'éliminant en y_1 du système

$$F_1 = 0 \dots F_n = 0.$$

Mais, précisément, de cette parenté des deux questions provient la difficulté de la généralisation complète du lemme de Weierstrass.

Il faut remarquer, en effet, que, dans ce qui précède, $\overline{n-1}$ des équations $F = 0$ ont toujours joué le rôle d'équations linéaires, grâce au fait que l'un au moins des mineurs $\mathcal{A}_{ik}$ du jacobien J_1 restait différent de zéro au point zéro; on pouvait en déduire alors $\overline{n-1}$ des variables y dont l'élimination dans l'équation $F = 0$ restante se faisait ainsi sans difficulté.

Mais il n'en sera plus de même, si nous supposons que tous les $(\mathcal{A}_{ik})_0$ sont nuls. Les éliminants des systèmes d'équations s'introduiront alors d'eux-mêmes dans toute leur généralité et, avec eux, toutes les difficultés de la théorie de l'élimination.

Cependant, si par une méthode convenable on pouvait démontrer complètement la généralisation du lemme de Weierstrass (*), on pourrait, par contre-coup et à cause de la préci-

(*) Moyennant une définition convenable de l'ordre du zéro d'un système $(F_1 \dots F_n)$ lorsque tous les $(\mathcal{A}_{ik})_0$ sont nuls, cette généralisation sera très probablement comprise dans l'énoncé du Théorème VII, § 20.

sion du résultat analytique, obtenir des résultats intéressants pour l'algèbre. C'est ce qui arrive notamment pour la multiplicité des racines d'un système d'équations algébriques.

Considérons, en effet, un système d'équations algébriques

$$F_1(y_1 \dots y_n) = 0 \ \dots \ F_n(y_1 \dots y_n) = 0, \qquad (67)$$

à coefficients constants et dont $y_1 = \dots = y_n = 0$ est une racine.

Si l'on pose

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n, \qquad (68)$$

les c étant des paramètres indéterminés, il existe, comme on sait, une équation algébrique

$$E(y) = 0$$

dont toute racine y est de la forme (68) et fournit une racine $y_1 \dots y_n$ du système (67) : c'est l'éliminant de ce système. Si cet éliminant a une racine $y = 0$ multiple d'ordre p, on dit que le système (67) a une racine $y_1 = \dots = y_n = 0$ multiple d'ordre p.

On a pu démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que $y_1 = \dots = y_n = 0$ soit une racine multiple d'ordre 2 au moins du système (67), est que le jacobien J_1 de ce système s'annule au point zéro; mais, jusqu'à présent (*), on n'a pas trouvé les conditions nécessaires et suffisantes pour que $y_1 = \dots = y_n = 0$ soit une racine multiple d'ordre 3 au moins du système (67) (*).

Or, ces conditions sont précisément, outre $(J_1)_0 = 0$, la condition $(J_2)_0 = 0$ et les conditions analogues $(J_2')_0 = 0 \dots (J_2^{n-1})_0 = 0$ que l'on obtient en permutant le rôle des fonctions F dans $(J_2)_0$.

(*) Voir l'*Encyclopédie des sciences mathématiques*, t. I, vol. II (Algèbre), p. 145.

A cause de $(J_1)_0 = 0$, on peut voir que ces conditions ne sont pas distinctes; mais, comme cela arrive fréquemment en algèbre, elles sont cependant toutes nécessaires.

D'ailleurs, tandis que $(J_1)_0$ entre en facteur dans le coefficient de la première puissance de y dans $E(y) = 0$, le coefficient de y^2 est une combinaison linéaire de

$$(J_2)_0 \ (J_2')_0 \ \dots \ (J_2^{n-1})_0;$$

ce qui montre encore les étroites relations des déterminants J avec la théorie de l'élimination.

Il nous suffit d'avoir signalé ces propriétés, afin de prendre date. Nous les démontrerons dans un prochain travail, en nous basant sur nos résultats actuels.

Liége, 22 juin 1914.

GENÈSE ET ANATOMIE

DES

PÉRICARPES ET DES SPERMODERMES

CHEZ LES

POLYGONACÉES

A. — *POLYGONUM AVICULARE* L.

PAR

H. LONAY

Chargé de cours à l'Université de Liége.

La Commission du Patrimoine universitaire liégeois a pris à sa charge les frais d'impression de ce mémoire.

INTRODUCTION

Dans la bibliographie déjà si vaste concernant les ovules et les graines, certains travaux révèlent une extraordinaire diversité dans le développement et la constitution intime des différentes parties de l'ovule adulte. La plupart ne vont guère au delà de ce stade ou, s'ils le font, ce n'est que pour s'attacher uniquement au sort du sac embryonnaire ou plutôt de certaines de ses parties, tels l'œuf et le noyau secondaire après l'acte de la fécondation.

Rares sont ceux qui s'occupent des transformations que subissent, à la suite de cet acte, les autres parties de l'ovule et de l'ovaire; plus rares encore ceux qui cherchent à se renseigner sur le rôle qu'elles sont appelées à jouer pendant la maturation.

Malgré leur petit nombre, ils montrent déjà combien ces transformations et les phénomènes qui les accompagnent sont susceptibles, d'un sujet à l'autre, de donner lieu à des interprétations qui ne sont rien moins que concordantes.

Ce désaccord doit-il être mis sur le compte de différences réelles qui existeraient dans le mode de développement, dans le rôle physiologique et dans la structure

définitive de parties homologues appartenant à des organismes parfois très voisins? Cette question ne pourra être résolue que par la multiplication de recherches dirigées dans ce sens. Il y a là un vaste champ encore en friche.

Parmi ces quelques rares travaux auxquels il est fait allusion, on peut signaler, plus particulièrement intéressants comme s'occupant de Polygonacées, ceux de Lindau (62) et de Stévens (104), au sujet desquels j'aurai l'occasion de revenir. Je me propose de me joindre à eux en apportant une modeste contribution en vue de la solution de la question en ce qui concerne cette même famille.

En effet, le présent travail a comme sujet une plante que tout le monde foule aux pieds, la Renouée des Oiseaux (*Polygonum aviculare* L), remarquable par son cosmopolitisme et par ses facultés d'adaptation aux milieux les plus divers. D'après certains auteurs, cette plante que l'on rencontre dans tous les pays du monde, est vraisemblablement la plus répandue qui soit. Connue du vulgaire sous le nom quelque peu méprisant de Traînasse, elle lui apparaît, en effet, le plus souvent, sous sa forme la plus humble, jusqu'au beau milieu des chemins et des rues de nos villes, s'insinuant entre les pavés où, sans cesse mutilée, mais non tuée, par les roues des véhicules et les pas des animaux, elle finit par acquérir une attitude si plate, un aspect si hirsute et des proportions de tous ses organes si réduites, qu'on la distingue à peine parmi le Paturin annuel, Graminée qui partage le plus souvent avec elle cet habitat peu confortable. Mais où notre Renouée justifie encore le mieux le nom de Traînasse qu'on lui a donné, c'est sur les chemins battus couverts de cendrées ou encore à la surface des sols compacts couverts de sables ou de cailloutis que seule à peu près elle ose affronter victorieusement. Dans de telles situa-

tions, elle forme parfois des tapis continus dont chaque plante contribue à couvrir de ses longs rameaux empourprés un espace d'au moins 25 décimètres carrés, appliquée plus ou moins étroitement contre le sol, suivant la nature plus ou moins aride de l'exposition; car elle est capable, par sa sobriété extrême, de résister aux sécheresses les plus exceptionnelles. Alors elle est véritablement la Traînasse.

Mais on ne la reconnaît plus quand elle a la bonne fortune de croître dans un sol frais, riche, à l'ombre tutélaire d'une haie ou d'un buisson. Elle élève alors ses rameaux droits vers le ciel, se couvre d'assez grandes et relativement larges feuilles lancéolées et prend un air d'élégance et d'embonpoint qui fait plaisir à voir. Une seule chose ne change pas : ce sont ses fleurs et surtout ses fruits. Toutefois le nombre de ces derniers est relativement beaucoup plus faible chez les plantes robustes de la dernière catégorie que chez celles décrites en premier lieu. Chez celles-ci, — on sait que dans cette espèce de Renouée les fleurs naissent en très petit nombre (2 ou 3) à l'aisselle des feuilles — à chaque feuille correspond un groupe de fleurs, tandis que dans les plantes ombragées et bien nourries, beaucoup de feuilles, surtout vers la base des rameaux, ne sont pas accompagnées de fleurs.

Au cours de mes recherches, j'ai voulu constater les différences que pouvaient entraîner les modes de vie de ces formes si différentes d'aspect dans l'organisation et la marche du développement des organes que j'étudiais. Je me suis attardé à examiner comparativement différents stades dans un assez grand nombre de sujets. Je ne puis dresser, au point de vue des résultats obtenus à cet égard, qu'un procès-verbal de carence la plus absolue. Cependant, il y a une chose au sujet de laquelle je n'ai pas mes

apaisements, c'est la rapidité relative de la succession des phénomènes dans l'un et l'autre cas. Il semble très probable, en effet, que la misérable Traînasse, exposée aux mille et une tribulations de nos rues, ait un intérêt primordial à former ses fruits dans un laps de temps plus court que l'opulente Renouée croissant à son aise au bord des haies. Tout intéressante qu'elle est, l'expérience n'a pas été tentée. Celle que je rapporte dans la critique historique de ce travail a été effectuée sur des plantes croissant dans un jardin, dans les mêmes conditions à peu près que les plantes robustes ombragées.

*
* *

Le plan que je me suis tracé dans l'exécution de ce travail présentait deux parties : la première consistait à suivre les transformations que subissent le péricarpe et le spermoderme au cours de leur développement, depuis leur première apparition sur le placenta jusqu'à l'état de maturité complète ; la seconde, à observer les phénomènes d'ordre physiologique qui accompagnent ou provoquent ces transformations. J'ai été amené ainsi à consigner les différentes étapes de la formation du sac embryonnaire et ensuite de l'embryon et de l'albumen, en fixant mon attention également sur les phénomènes concomittants qui se passent dans les autres parties de l'ovule et de l'ovaire.

Le souci de la clarté de l'exposition aurait peut-être exigé de traiter de ces deux parties séparément, la première étant une question d'histologie pure, la seconde étant à la fois cytologique et physiologique. Mais désireux de marquer aussi fidèlement que possible la contemporanéité des divers stades et phénomènes, il m'a semblé préférable de ne pas séparer ces deux points de vue. En suivant pas

à pas toutes les manifestations du développement, il m'eût été difficile de procéder autrement.

Cependant, comme il existe une certaine indépendance dans l'édification du péricarpe, d'une part, et de l'ovule et de la graine, d'autre part, j'ai pu séparer sans inconvénient ce qui a trait à l'un et à l'autre.

Ce travail présente donc deux parties fondamentales : dans la première il est question du péricarpe. Cette rubrique comprendra d'abord l'histoire du développement du pistil, non compris l'ovule qu'il renferme, et ensuite l'explication du parcours des faisceaux dans le pistil dont l'étude offre un si grand intérêt au point de vue de l'interprétation de cet organe.

La deuxième partie sera consacrée à l'étude de l'ovule et de la graine considérés, ainsi que le péricarpe, d'ailleurs, principalement à trois stades : genèse, état adulte, maturité, mais en observant, au passage, entre ces stades, les particularités anatomiques, cytologiques et physiologiques qui semblent les plus intéressantes au point de vue de la Biologie. J'ai voulu ainsi tirer tout le parti possible des matériaux dont je disposais.

Je fais suivre cet exposé de mes recherches d'un chapitre intitulé « Critique historique », où je rappelle l'état de nos connaissances au sujet des questions auxquelles ont répondu mes observations, en faisant la comparaison et la critique des interprétations qu'en ont données les auteurs. M'étant, comme je l'ai dit, attaché à établir la contemporanéité des phénomènes que j'ai pu observer, j'ai été amené, cela se conçoit, à me répéter assez souvent dans la rédaction de ce chapitre [1].

---

[1] Une partie notable de ce chapitre a fourni la matière d'une communication préliminaire à la Classe des sciences de l'Académie royale de Belgique (67).

Celui-ci est suivi d'un résumé qui constitue plutôt les conclusions générales qui se dégagent de mes recherches et où sont groupés les principaux résultats obtenus. Parmi ces derniers, il y a lieu d'attirer spécialement l'attention bienveillante du lecteur sur les points suivants : la genèse du pistil et de l'ovule; le parcours des faisceaux dans les carpelles; la constitution du péricarpe mûr; celle de l'ovule adulte; celle de la graine mûre; celle des antipodes; le rôle de ces dernières; celui de l'assise protéique de l'albumen; celui surtout de l'*Ep. N.* (épiderme du nucelle); l'embryogenèse; le rôle du suspenseur.

Les figures illustrant le présent mémoire, quoique relativement nombreuses, ne constituent encore qu'une sélection sévère — réduite au strict nécessaire pour éclairer suffisamment le sujet — parmi les très nombreux dessins faits à la chambre claire, au moyen desquels j'ai pu concrétiser mes observations. Ces figures sont accompagnées d'abréviations qui sont conformes à celles que j'ai déjà employées ailleurs (**63**) et dont voici la signification :

ABRÉVIATIONS.

a. = archespore.
A. = albumen.
A. am. = albumen amylacé.
A. cl. = cellules à contenu clair de l'albumen.
A. d. = albumen en voie de digestion.
ac. = acropyle.
An. = antipodes.
c^2 = cellule secondaire.
c. m. sac. = cellule mère du sac embryonnaire.
Ch. = chalaze.
e. = externe.
e. A. = assise externe de l'albumen.
Em. = embryon.
Ep. = épiderme.
ét. = étamine.
H. = hypostase.

H' = hypostase en formation.	*P.* = primine.
hp. = hypophyse.	*Pér.* = péricarpe.
i. = interne.	*Prot.* = couche protéique.
LB. = faisceau libéro-ligneux.	*s.* = pièces du périanthe.
m. = moyen.	*S.* = secondine.
M. = micropyle.	*sac.* = sac embryonnaire.
N. = nucelle.	*Sp.* = spermoderme.
ng^1 = noyau générateur de l'œuf.	*su.* = suspenseur.
ng^2 = noyau générateur de la c^2.	*sy.* = synergides.
n. v. = noyau végétatif.	*Tf.* = tissu fondamental.
o. = cellule-œuf.	*t. p.* = tube pollinique.
ov. = ovule ou ovulaire (faisceau)	

Dans le texte même on trouvera un certain nombre de ces abréviations pour désigner notamment les différentes couches cellulaires de l'ovule et du spermoderme. Elles résultent de la combinaison de quelques-unes des abréviations précédentes. C'est ainsi, par exemple, que *Ep. e. Per.* ou *Ep. e.* tout court signifie épiderme externe du péricarpe; *Tf. m.* ou *Tf. m. Pér.* veut dire tissu fondamental moyen du péricarpe; *Ep. i. P.*, c'est épiderme interne de la primine; *Ep. i. S.*, épiderme interne de la secondine; *Tf. N.*, tissu fondamental du nucelle, c'est-à-dire parenchyme nucellaire, etc.

Je crois que l'adoption de ces abréviations que j'ai déjà employées dans des publications antérieures et pour la première fois en 1900 (65) est de nature non seulement à faire gagner du temps et de la place, ce qui est déjà quelque chose à l'heure où nous vivons, mais encore à faciliter la lecture et la mémoire des faits séminologiques, en supprimant les longueurs fastidieuses que ne manquerait pas d'occasionner l'emploi de ces périphrases tou-

jours les mêmes qui devraient revenir si souvent sous la plume. Il serait à souhaiter qu'elle se généralisât.

Notons, pour terminer, que les nombres en chiffres gras qui sont mis entre parenthèses dans le texte renvoient aux numéros correspondants de la liste bibliographique qui précède les planches.

Liége, Institut botanique, le 31 décembre 1921.

RECHERCHES ANATOMIQUES ET PHYSIOLOGIQUES

sur le

Développement et la Structure du Fruit et de la Graine

DE

POLYGONUM AVICULARE L

Le *Polygonum aviculare* L. présente un pistil tricarpellé à ovaire uniloculaire, uniovulé par dégénérescence; un ovule orthotrope bitégumenté à placentation pariétale basilaire; le fruit étant un akène trigone, la graine albuminée, l'embryon latéral, courbe.

CHAPITRE PREMIER.

LE PÉRICARPE.

---

§ 1. — Carpelles dans le bouton floral.

L'évolution des premières phases du développement de la fleur est très rapide. Pour trouver la première ébauche de la formation des carpelles, il faut s'adresser à des boutons de $0^{mm}1$ dont les pièces du périanthe sont à peine arrivées au niveau du gynécée en voie de formation. A ce stade, les étamines ne sont encore que des protubérances à peine marquées;

le sommet végétatif de l'axe floral s'arrête dans sa croissance; il s'aplanit momentanément, au point qu'il semble même s'invaginer très légèrement. Cela résulte de la formation, à l'endroit du sommet, d'un rebord circulaire qui prend aussitôt un développement rapide; mais à peine le rebord est-il formé que le sommet reprend sa forme convexe (fig. 1); comme nous le verrons plus loin, ce nouveau sommet est l'ébauche de l'ovule. Le développement du rebord circulaire est marqué immédiatement par la formation de trois éminences dont une est légèrement en avance sur les deux autres (fig. 2). Ces trois éminences sont les ébauches des stigmates, le rebord étant celle de l'ovaire (fig. 3). A aucun moment donc, on ne peut voir chacun des trois carpelles individualisés; ils sont, dès le principe, connivents par la base.

Bientôt la cupule ovarienne dépasse le sommet de l'ébauche ovulaire. A cet état (fig. 4), la paroi du jeune ovaire présente 5 assises de cellules dans sa partie la plus mince et 9 ou 10 assises dans sa plus grande épaisseur qui correspond aux régions surmontées par chacune des ébauches stigmatiques. Ces cinq assises représentent, en allant du dehors en dedans, l'*Ep. e.*, le *Tf. e.*, le *Tf. m.*, le *Tf. i.* et l'*Ep. i.* du péricarpe. L'examen attentif de la même figure montre que l'augmentation du nombre des assises dans la partie épaisse résulte du recloisonnement des cellules du *Tf. m.*

En même temps que l'ovaire s'accroît et grossit en prenant de plus en plus la forme trigone, les stigmates s'allongent en s'épaississant au sommet (fig. 5). Ces stigmates sont pour ainsi dire sessiles sur l'ovaire; ils déterminent entre eux la formation d'un canal acropylaire limité vers l'intérieur par *Ep. i.* et qui se resserre de plus en plus jusqu'à se fermer lorsque la fleur est épanouie (fig. 12 et 13). Dans ce cas, cette portion de l'*Ep. i.* du péricarpe devient ce que les auteurs, et notamment Warming (127, fig. 15 H), ont appelé le *tissu cellulaire conducteur*.

Pendant ce temps, les cellules du *Tf. m.* et souvent celles du *Tf. i.* se divisent en deux dans le sens tangentiel, de manière à

amener les assises du péricarpe dans les régions latérales au nombre de 7, tandis que les cellules de l'*Ep. e.* s'accroissent beaucoup en hauteur et en largeur et que celles de l'*Ep. i.* s'élargissent quelque peu dans le sens tangentiel. Quelque temps avant l'épanouissement, on voit se différencier dans les angles, au sein du *Tf. m.*, les cordons de procambium dans lesquels s'établit bientôt la différenciation libéro-ligneuse.

§ 2. — Carpelles dans la fleur épanouie. (Fig. 14 et 15.)

Ep. e. à grandes cellules presque parfaitement cubiques, à parois minces et à cuticule mince, renfermant un protoplasme dense et un gros noyau.

Tf. constituant un parenchyme chlorophyllien, divisé en *Tf. e.*, *Tf. m.* et *Tf. i.*

Tf. e. à une assise de cellules un peu plus grandes que celles des assises suivantes :

Tf. m. à 2 assises de cellules;

Tf. i. à 1 ou 2 assises de cellules.

C'est à la multiplication des assises du *Tf. m.* et du *Tf. i.* que sont dus les épaississements du *Tf.* aux trois angles de l'ovaire.

Ep. i. à cellules à parois minces, aplaties tangentiellement et allongées longitudinalement.

Faisceaux. — Dans chaque angle de la paroi ovarienne, il y a un faisceau différencié en quelques trachées et quelques cellules libériennes. Ces faisceaux sont les médians de chacun des trois carpelles. Au milieu d'un des côtés de cette paroi, un massif de procambium s'est formé dans le *Tf. m.*; nous verrons plus loin quel rôle il y a lieu d'assigner à ce faisceau en voie de formation.

§ 3. — Développement des carpelles après la fécondation.

Lorsque le tube pollinique a pénétré dans le sac embryonnaire, le pistil et plus particulièrement l'ovaire continuent de s'accroître, ainsi que l'ovule, et la croissance de ces deux organes semble marcher de pair. Nous avons vu (**63**, p. **13**) qu'il n'en était pas toujours ainsi chez les Angiospermes.

a) *Ep. e.* Peu de temps après la fécondation (fig. **20** et **21**), les cellules de cette assise se recloisonnent dans le sens de la hauteur et s'accroissent considérablement dans ce sens; elles augmentent aussi l'épaisseur de leur cuticule. Plus tard, lorsque le pistil mesure **2** millimètres de hauteur (fig. **24** et **25**), ces cellules sont redevenues presque cubiques par suite de leur accroissement en largeur; elles commencent, à ce moment, à épaissir leurs parois externes et latérales. Elles présentent, à cet état, un aspect caractéristique sur les coupes non traitées, dû à ce fait que le protoplasme s'étend autour du noyau, en travers et à mi-hauteur de la cavité cellulaire, sous forme de disque, et apparaît donc sur la coupe comme une barre transversale. Elles ont alors, en moyenne, 43 μ de hauteur sur 39 μ de largeur; elles présentent déjà des inégalités à leur surface et leurs contours superficiels, vus de face, sont sinueux (fig. **55**), tandis que, plus profondément, ils constituent des polygones réguliers (fig. **57**). Cette circonstance est due évidemment à l'inégale répartition des épaississements intéressant les parois extérieures.

b) Quant aux autres tissus, *Tf.* et *Ep. i,* le nombre de leurs assises cellulaires reste le même; les cellules n'y accroissent leur volume que dans la proportion du simple au double dans les *Tf. e.* et *Tf. m.* et un peu plus dans les *Tf. i.* et *Ep. i.* Les cellules de celui-ci s'allongent assez bien dans le sens longitudinal (fig. **22**).

*
* *

Lorsque l'akène a atteint sa taille définitive, il a environ 3 millimètres de hauteur sur près de 2 suivant sa plus grande largeur (fig. 41, akène entier).

L'*Ep. e.* est formé de grandes cellules palissadiques dont la hauteur varie de 62 à 73 μ et dont la largeur de 38 μ montre qu'elles n'ont pas augmenté dans cette dimension. Leur paroi externe est fortement mais irrégulièrement épaissie, ce qui explique les différences de hauteur signalées ainsi que la présence de légères dénivellations à la surface de l'épiderme. Les parois latérales sont aussi très épaissies; cependant, ces épaississements vont en diminuant vers l'intérieur, tantôt progressivement, et alors la cavité cellulaire est conique, tantôt brusquement à partir du quart interne de ces parois, auquel cas la cavité cellulaire a la forme d'une cloche évasée vers ses bords. A ce stade, les ponctuations de ces parois ne sont guère apparentes; mais tous ces épaississements, qui sont d'ailleurs sclérifiés, sont déjà fortement imprégnés d'une matière colorante brune. Les parois internes sont très légèrement épaissies (fig. 42).

Le *Tf.* présente 5 à 6 assises de cellules un peu allongées longitudinalement; il constitue un parenchyme dans lequel on distingue :

Le *Tf. e.* à 1 assise de cellules prismatiques de 11 à 12 μ de largeur, contenant des corps chlorophylliens, à parois très peu épaissies;

Le *Tf. m.* à 2 assises de cellules (3 dans les angles où elles sont plus grandes) plus cylindriques, laissant entre elles des méats et à dimensions, contenu et parois semblables à celles du *Tf. e.*; on y trouve çà et là des cellules contenant des macles d'oxalate de chaux;

Le *Tf. i.* à 2 assises de cellules (3 et 4 dans les angles) beaucoup plus larges que les précédentes, méatiques, à parois très minces, sans contenu. Ce tissu est résorbé dans les angles, où il fait place à de grandes lacunes.

Ep. i. à cellules tabulaires, à parois minces, sans contenu, appliqué contre la graine, même dans les angles, où il limite intérieurement les lacunes laissées par la résorption du *Tf. i.*

* * *

Bien qu'arrivé au terme de sa croissance, le péricarpe continue encore à modifier quelque peu sa structure jusqu'à la maturité complète.

A l'*Ep. e.* les parois cellulaires externes et latérales augmentent encore considérablement leurs épaississements sclérifiés ; outre du protoplasme, les cellules renferment une certaine proportion de tanin.

Les cellules du *Tf. e.* se recloisonnent une fois dans le sens tangentiel. Le *Tf. m.* porte le nombre de ses assises à 5. Ces 5 assises de cellules renferment de la chlorophylle, du tanin et quelques macles.

Quant aux *Tf. i.* et à l'*Ep. i.*, leurs cellules s'écrasent.

§ 4. — Péricarpe mûr.

Le fruit du *Polygonum aviculare* est un akène trigone, formé aux dépens des trois carpelles ouverts et concrescents par leurs bords qui ont constitué le pistil de la fleur. Cet akène présente trois faces presque planes, mais abondamment garnies d'épaississements verruqueux qui leur donnent un aspect finement chagriné et un éclat gras à l'œil nu.

Les couches cellulaires constituant ces faces présentent les caractères suivants (fig. 52 et 53) :

Ep. e. à cellules grandes, palissadiques (voir p. 15), à parois externes et latérales considérablement épaissies, imprégnées d'une matière colorante brune, garnies de ponctuations canaliculées, ramifiées et à disposition caractéristique et réduisant la cavité cellulaire à l'état de canal central plus ou moins étroit, ce qui contribue à donner à l'ensemble de la cavité et

des canalicules afférents l'aspect d'un arbre ramifié. L'épaississement des parois externes est très inégal, de manière à constituer, à l'extérieur, des verrues de faible hauteur ou de très légères dénivellations qui donnent à la surface du fruit son aspect finement chagriné.

Vues de face par l'extérieur, ces cellules présentent tout à la surface, un contour très sinueux, isodiamétrique (fig. 55); un peu plus bas, ce contour se régularise, mais on aperçoit à l'intérieur les épaississements secondaires considérables de la paroi qui délimitent une cavité interne à contours irréguliers, à laquelle viennent aboutir des ponctuations canaliculées (fig. 56); plus bas encore, les contours de la cavité interne se régularisent en s'arrondissant et l'on ne voit plus de ponctuations dans la paroi épaisse (fig. 57).

Tf. e. à 2 assises de cellules opposées à parois minces, à méats petits et peu nombreux.

Tf. m. à 3 assises de cellules opposées à parois minces, un peu plus grandes, formant entre elles plus de méats que celles du *Tf. e.* et dont la disposition en alternance avec des dernières n'est pas toujours très marquée. On y rencontre çà et là des macles d'oxalate de chaux.

Tf. i. à 2 assises de cellules légèrement écrasées.

Les cellules des 7 assises précédentes sont allongées longitudinalement.

Ep. i. à 1 assise de cellules fortement écrasées.

Quand le péricarpe a subi la dessiccation complète (fig. 61), la forme arborescente de la cavité cellulaire de l'*Ep. e.* n'est plus aussi marquée et la disposition des couches cellulaires est difficile à reconnaître sans l'emploi de la potasse, et malgré celui-ci, le *Tf. i.* se regonfle à peine.

Nous pouvons conclure de ce qui précède que c'est pour ainsi dire uniquement à l'*Ep. e.* qu'incombe le rôle de couche protectrice, les autres portions du péricarpe ne constituant guère que des tissus-tampons destinés à éviter à la graine les conséquences d'une pression accidentelle excessive.

§ 5. — Parcours des faisceaux dans le Péricarpe. (Fig. 27 et 27^{b}.)

Une coupe transversale dans le fruit de *Polygonum aviculare* affecte sensiblement la forme d'un triangle isocèle dont les deux côtés égaux sont plus petits que le troisième. Les trois angles du triangle sont occupés par les faisceaux médians de chacun des trois carpelles qui entrent dans la constitution de l'akène. Théoriquement, au milieu de chacun des trois côtés, on devrait trouver les faisceaux latéraux établis par paires, faisceaux qui, dans les cas analogues, fonctionnent comme faisceaux placentaires. Voyons ce qu'il en est :

L'ovaire est absolument sessile sur l'axe floral ; mais il ne le continue pas directement. L'axe floral est « épuisé », suivant l'expression de Van Tieghem (115, p. 32). Des coupes longitudinales bien orientées, quand elles intéressent un stade convenable du développement de la fleur (fig. 19 et 19^{b}), font voir que les éléments anatomiques se rendant dans l'ovaire ne sont pas en continuité directe avec ceux de l'axe floral. Ces circonstances sont une preuve de la nature appendiculaire des parties constitutives de l'ovaire.

Quoi qu'il en soit, celles-ci reçoivent de l'axe floral quatre faisceaux A, B, C, D, A occupant l'angle sommet du triangle, B l'angle basilaire de droite (fig. 24) (*), C l'angle basilaire de gauche et D le milieu du côté basilaire BC. Il est à remarquer que c'est du côté AB que l'ovaire s'affranchit d'abord de tout contact avec les pièces florales voisines, tandis que dans la partie opposée, ce contact dure plus longtemps et s'étend même pour le milieu du côté BC à $0^{mm}3$ plus haut que le premier niveau considéré dans un ovaire de $1^{mm}5$. C'est le long de cette région adhérente que chemine d'abord le faisceau D, et cette adhérence n'est pas terminée que le faisceau D se bifurque

(*) Supposons l'observateur placé au milieu du triangle, le dos tourné vers le sommet.

pour former une branche interne destinée à l'ovule et une branche externe que nous continuerons d'appeler D.

Comme nous l'avons vu, les faisceaux A, B et C sont les médians des trois carpelles formant le pistil et que nous désignerons par les mêmes lettres A, B et C. D'autre part, l'adhérence qui se prolonge au milieu du côté B C indique la région où se manifeste la concrescence congénitale des bords des carpelles B et C. La même chose se constate presque au même niveau pour les bords des carpelles A et C, tandis que pour voir la dernière trace de mise en contact des bords des carpelles A et B, il faut s'adresser au premier niveau dont nous sommes parti. A cet égard, il y a lieu d'observer, et cela découle de ce qui précède, que c'est le carpelle C qui se dégage le dernier de tout contact avec les pièces florales qui l'environnent.

Quant au faisceau D, c'est le seul latéral qui se présente suivant la règle reconnue dans les carpelles d'autres plantes étudiées jusqu'ici ; il a les allures d'un faisceau placentaire. Il est assez difficile de déterminer à quel carpelle il faut le rattacher, si l'on s'en tient à l'examen de sa course initiale ; mais le fait que son parcours se termine dans une région dépendant sans conteste du carpelle C (base du stigmate, fig. 27[b]) est décisif à ce point de vue : le faisceau D doit être considéré comme occupant l'extrême bord gauche du carpelle C. Il n'est pas absolument exact de dire que cette position correspond au milieu de la paroi B C de l'ovaire, du moins en ce qui concerne sa moitié inférieure. En effet, la distance B D est double de la distance D C.

Malgré cette proximité plus grande de C et malgré le fait que C et D font partie du même carpelle, il est remarquable de constater que jamais il ne s'établit entre eux de relation vasculaire, alors que B, après avoir accompli le tiers de son parcours, envoie une anastomose vers D, en même temps qu'il contribue à fournir les éléments d'un petit faisceau *e* qui, dès ce niveau, court parallèlement à D, entre D et B, pendant l'espace d'un peu plus du second tiers du carpelle, après quoi

il va se rejeter dans B ; vers le milieu de son parcours, B envoie une anastomose vers *e*. Au niveau même où *e* prend naissance, C produit également une ramification *f* qui s'étend parallèlement à D, entre D et C, sur un espace d'un peu moins d'un tiers de la hauteur du carpelle où il va se rejeter dans C ; un peu plus haut, C fournit un petit faisceau *g* qui s'allonge à moitié chemin entre A et C, pour s'éteindre au même niveau que *f*, mais en se jetant dans A ; mais auparavant, il s'est établi une anastomose d'abord entre *g* et A, puis, un peu plus haut, entre *g* et C. En même temps que se produit *g*, A engendre un petit faisceau *h* qui parcourt l'espace entre A et B pour se rejeter en A en profitant d'une anastomose que B envoie à A et qui touche ce dernier au niveau de l'extinction de *f* et de *g*.

Le tiers supérieur des parois de l'ovaire ne présente plus que les quatre faisceaux initiaux A, B, C et D. Ils s'éteignent tous en pointe libre à la base des stigmates, sauf C qui se prolonge presque jusqu'à l'extrémité du stigmate C, lequel dépasse d'ailleurs les deux autres.

Les données qui précèdent sont résumées dans la figure 27 qui n'est que la projection sur un plan du parcours des faisceaux dans l'ovaire du *Polygonum aviculare*. Pour l'obtenir, j'ai supposé l'ovaire fendu le long des bords concrescents des carpelles B et C, puis étalé à droite et à gauche du faisceau A pris comme axe, les termes droite et gauche étant pris dans le sens de l'hypothèse formulée précédemment en note. Ceci posé, j'ai repéré la position des faisceaux de bas en haut sur une série de coupes transversales successives dans le pistil arrivé à sa taille définitive. La figure 27^{b} donne la perspective du même parcours.

Dix-sept séries semblables ont été soumises à un examen attentif ; onze se sont montrées conformes à la description qui précède, sauf en des détails minimes concernant les petits faisceaux *e*, *f*, *g*, *h*, et des anastomoses qui sont rarement plus nombreuses, souvent le sont moins ; c'est ainsi que notamment, dans trois ovaires, le faisceau D n'avait absolument aucune liaison anastomotique pas plus avec B qu'avec C ; dans un seul

cas, C envoyait une anastomose vers D en passant par *f*; mais encore il ne m'a pas été possible de voir la jonction de cette anastomose s'établir nettement avec D. Dans un autre cas encore, *g*, au lieu de se jeter dans A est venu se rejeter dans C, non sans avoir toutefois envoyé plus bas une anastomose vers A. Enfin dans quatre ovaires, *h* avait simplement l'allure d'une anastomose plus ou moins allongée entre A et B.

Quant aux six autres séries, deux présentaient des coupes transversales ayant encore, il est vrai, la forme de triangles isocèles, mais tels que les deux côtés égaux étaient plus grands que le troisième. Le petit côté correspondait au côté A C de l'exemple précédent, mais c'est la seule différence que ces ovaires présentaient avec les conséquences qu'elles entraînaient au sujet de la nervation des carpelles, dont l'allure générale restait d'ailleurs la même. Dans les quatre derniers ovaires, c'était toujours le côté B C qui portait le faisceau placentaire D ; mais celui-ci dépendait manifestement du carpelle B et c'était ce dernier qui avait tous les caractères que nous avons relevés chez C dans l'exemple précédent. Dans trois de ces ovaires, le côté A B était plus petit que les deux autres, dans un le côté B C était le plus grand.

* * *

Nous pouvons tirer de ces faits les conclusions suivantes :

1. Le pistil de *Polygonum aviculare* est inséré obliquement par rapport à l'axe floral.

2. Les faisceaux qui l'innervent ne sont pas en continuité directe avec les faisceaux de l'axe floral.

3. C'est le carpelle qui se dégage en dernier lieu de toute adhérence périphérique qui est le carpelle fertile.

4. La situation de ce carpelle n'est pas toujours la même par rapport à l'axe floral.

5. Seul, le stigmate surmontant ce carpelle est vascularisé et il dépasse légèrement les deux autres.

6. La masse du carpelle fertile est plus petite que celle de chacun des carpelles stériles.

7. Seul, ce carpelle présente un faisceau placentaire caractérisé.

8. Le côté intéressé par le placenta est le dernier à se dégager des adhérences périphériques.

9. Ce côté est le plus large des trois côtés de l'ovaire.

10. L'ovaire est parcouru dans toute sa hauteur par quatre faisceaux, les trois faisceaux médians et le faisceau placentaire.

11. Tous ces faisceaux s'éteignent à la base des stigmates, sauf le médian du carpelle fertile qui se prolonge dans le stigmate dépendant de ce carpelle.

12. La région formant le tiers moyen de la hauteur de l'ovaire est parcourue par de petits faisceaux issus des trois faisceaux médians et par quelques anastomoses reliant ces faisceaux entre eux.

CHAPITRE II.

LE SPERMODERME.

L'ovule du *Polygonum aviculare* est orthotrope, solitaire et ascendant; il possède deux téguments.

§ 1. — Ovule dans le bouton floral.

A. *Genèse de l'ovule.* — Nous avons dit au début du § 1[er] du chapitre précédent qu'après la formation du rebord circulaire qui constitue l'ébauche de l'ovaire, le sommet végétatif de l'axe floral semble reprendre sa forme convexe à l'intérieur de la cupule ovarienne. Cependant, on s'aperçoit bientôt que ce sommet ne continue plus parfaitement l'axe floral, car sa base empiète légèrement sur le rebord du côté où s'est formée l'éminence, ébauche de stigmate, en avance sur les deux autres. En réalité, il ne peut être question ici de sommet végétatif, mais bien de l'ébauche de l'unique ovule que renferme l'ovaire. De ce que ce mamelon ovulaire s'appuie sur le rebord de la façon indiquée plus haut, il faut conclure qu'il dépend de celui des trois carpelles qui prédomine pendant tout le cours du développement de l'ovaire. Ce n'est qu'après avoir coupé longitudinalement un grand nombre d'axes floraux jeunes qu'il m'a été donné de voir trois fois ce stade précis du développement du gynécée suivant l'orientation convenable (fig. 1, 2 et 3).

La croissance du mamelon ovulaire prend d'abord de l'avance sur celle de la cupule ovarienne et bien avant que celle-ci n'ait atteint le sommet du mamelon, avant donc que le mamelon ovulaire ne montre de traces de téguments, ce dernier présente déjà vers son sommet la cellule mère ancestrale (archéspore)

du sac embryonnaire, reconnaissable à son noyau très réfringent et plus gros que celui des cellules voisines. Cette cellule mère fait partie de la file de cellules qui occupe l'axe du mamelon ovulaire. Elle en est la dernière sous l'épiderme (fig. 2).

B. *Formation du sac embryonnaire.* — En même temps que les téguments apparaissent sous forme d'un bourrelet circulaire à la base de ce que nous devons désormais nommer le nucelle, la cellule mère ancestrale du sac embryonnaire se divise en deux transversalement par rapport à l'axe de l'ovule. Un peu plus tard (fig. 4), lorsque les téguments ont un peu dépassé la moitié de la hauteur du nucelle, on constate que, des deux cellules issues de la division de la cellule mère ancestrale, celle qui confine à l'*Ep. N.* est restée indivise, tandis que l'autre, située au-dessous et qui est la cellule mère primordiale du sac embryonnaire, subit deux bipartitions successives dans le sens transversal, formant ainsi quatre cellules filles disposées à la suite les unes des autres. Les autres cellules du nucelle, formant trois assises entre les cellules filles et l'*Ep. N.*, s'étirent en longueur, commençant à se disposer en éventail : c'est le *Tf. N.* On peut déjà distinguer à ce stade quelles seront les limites futures du sac embryonnaire englobant les cellules destinées à être résorbées par la cellule mère définitive du sac. A ce stade aussi, la cupule ovarienne a longuement dépassé le sommet du nucelle et les lobes stigmatiques sont même déjà bien reconnaissables. En somme, l'ovaire est dès lors constitué dans toutes ses parties, bien qu'il forme au-dessus du nucelle un canal encore assez largement ouvert.

Par la suite, celui-ci se referme par la jonction des bords internes (fig. 5) et, de leur côté, les téguments dépassent le nucelle (fig. 6). Pendant ce temps, la plus profonde des cellules filles, qui n'est autre que la cellule mère définitive du sac embryonnaire, se montre douée d'une activité particulière : elle commence par absorber la substance de ses sœurs qui la précèdent et qui n'en sont d'ailleurs séparées que par des cloisons facilement gélifiables, puis elle attaque les cellules du

Tf. N. qui se trouvent à ses côtés et s'agrandit ainsi aux dépens de toutes ces cellules dont elle finit par occuper la place. En même temps, les deux cellules de la file axiale qui la suivent vers la base de l'ovule se divisent en quatre; la tétrade contiguë à la cellule mère définitive ne tarde pas à être résorbée à son tour; l'autre tétrade est destinée à former l'hypostase. Quant à la cellule hypodermique issue de la division de la cellule mère ancestrale (archéspore), elle s'est divisée dans l'entretemps en deux ou trois cellules par des cloisons tangentielles et perpendiculaires; elles subsistent pendant quelque temps ainsi que les cellules du *Tf. N.* qui les environnent immédiatement, formant une espèce de « calotte »; mais tout leur ensemble subit également la résorption et la cellule mère définitive du sac embryonnaire vient confiner à l'*Ep. N.*

Aussitôt son noyau se divise, par trois bipartitions successives, en huit (fig. 7 et 8) et, à ce stade, le nucelle, en dehors du sac embryonnaire, comporte un *Tf. N.* dont les assises ont perdu leur régularité par suite du recloisonnement des cellules en divers sens et de leur étirement pour se disposer en éventail autour de la moitié supérieure du sac. Au-dessous de celui-ci, l'hypostase se différencie en s'annexant des cellules *Tf. N.* L'*Ep. N.* forme une assise très nette et simple qui s'est caractérisée de bonne heure par le contenu dense de ses cellules et les téguments finissent par envelopper complètement le nucelle.

Le sac embryonnaire achève de se constituer lorsqu'il renferme enfin (fig. 9), en haut, une oosphère et deux synergides, au milieu, un noyau secondaire et en bas, trois antipodes. Celles-ci sont d'abord disposées de telle façon que deux sont serrées côte à côte dans le fond du sac, tandis que la troisième les dépasse en haut. Elles sont déjà nettement individualisées, alors que les autres noyaux du sac présentent encore divers stades de la division karyokynétique. Avant même que celle-ci soit achevée pour ces noyaux, les trois antipodes ont grossi et, à cause de l'étroitesse du fond du sac embryonnaire, elles se sont disposées toutes trois en file. A ce stade, on voit parfois une ou peut-être deux cellules du sommet de l'*Ep. N.* se diviser

en deux par une cloison tangentielle; mais ce cas doit être exceptionnellement rare, puisque je ne l'ai observé que dans un des très nombreux ovules examinés.

C. *Formation des téguments.* — Au moment à peu près où les bords de la cupule ovarienne atteignent le niveau du sommet du mamelon ovulaire, l'épiderme de celui-ci, au tiers de sa hauteur, manifeste une activité génératrice particulière, en même temps qu'il se produit des recloisonnements dans les cellules sous-jacentes; c'est le prélude de la formation des téguments. Comme toujours, la secondine se forme la première et la primine la seconde; mais celle-ci ne dépasse, si tout au plus elle l'atteint jamais, le niveau de la première. Les téguments s'accroissent et restent composés chacun de deux assises de cellules et, vers l'époque où les noyaux du sac embryonnaire subissent leur dernière bipartition, ils finissent par envelopper complètement le nucelle, la secondine faisant tous les frais dans la constitution du micropyle. En effet, dès que ses bords dépassent le sommet du nucelle, ils commencent à s'épaissir de plus en plus tout en s'allongeant, d'abord parce que les cellules y augmentent beaucoup de volume, puis parce que celles de l'*Ep. i. S.* s'y subdivisent plus tard en deux ou trois assises irrégulières; elles comblent aussi l'ouverture micropylaire qui ne subsiste que sous la forme d'un canal très étroit et assez long. Enfin on constate que l'ensemble ovulaire se partage à peu près en deux parties égales, une moitié distale commençant au niveau d'insertion des téguments et l'autre moitié proximale ou basilaire constituée par un massif de cellules guère différenciées encore et destinée à former la région chalazienne en haut et le funicule en bas (fig. 7).

Toutes les parties de l'appareil sexuel étant ainsi formées, celui-ci n'est cependant pas encore complètement paré pour accomplir l'acte de la fécondation. L'ovule s'agrandit encore un peu; les cellules du T*f. N.* se recloisonnent activement tout en s'étirant de plus en plus en forme d'éventail; les plus voisines du sac embryonnaire qui s'élargit sont écrasées; l'*Ep. N.*,

au sommet, se creuse à l'intérieur par le travail du sac, ce qui provoque de plus une légère dislocation des cellules de l'*Ep. N.* tout au sommet. C'est sous l'espèce de coupole qui en résulte que sont logés les éléments du groupe synergique.

§ 2. — Ovule adulte. (Fig. 10, 11, 14 et 16.)

Quand la fleur s'épanouit, l'ovule est adulte, c'est-à-dire qu'il est apte à être fécondé. Il mesure alors environ $0^{mm}5$ de longueur sur $0^{mm}18$ de largeur, le pistil tout entier étant long d'un millimètre à peu près. Il comprend deux téguments minces et un nucelle épais; la primine est plus courte que la secondine (fig. 10 et 11, coupe longitudinale de l'ovule d'une fleur récemment épanouie). L'ovule du *Polygonum aviculare* est, en somme, pour employer la terminologie de Van Tieghem (119), bitegminé perpariété.

1° Primine à deux assises de cellules :

Ep. e. P. à une assise de cellules relativement assez grandes à protoplasme clair.

Ep. i. P. à cellules plus petites, à protoplasme plus dense.

2° Secondine à deux assises de cellules semblables, plus petites que celles de l'*Ep. i. P.* et à protoplasme aussi dense. Au niveau du micropyle l'*Ep. i. S.* se dédouble en deux couches de grandes cellules formant un bord épais.

3° Nucelle : *Ep. N.* à une assise de cellules plus grandes encore que celles de l'*Ep. e. P.*, ne se dédoublant qu'exceptionnellement au sommet où ces cellules sont bombées vers l'extérieur, renfermant un protoplasme dense et un noyau volumineux (6 μ) et sphérique.

Tf. N. de trois à cinq couches de grandes cellules de forme plus ou moins étirée en sens oblique (disposition en éventail), à contenu peu dense, celles avoisinant le sac embryonnaire étant écrasées.

Sac embryonnaire occupant presque toute la longueur du

nucelle, présentant assez bien la forme d'un entonnoir très allongé, ayant 0,^{mm}223 de longueur et dont le bout élargi s'appuie directement contre l'*Ep. N.*

Le sac embryonnaire renferme vers le haut deux synergides et une oosphère qui semblent suspendues sous la coupole que forme l'*Ep. N.* L'oosphère dépasse notablement vers le bas les deux synergides ; leurs noyaux, pourvus d'un nucléole, sont sensiblement de même largeur et occupent le bas de chacune des cellules respectives, entourés de protoplasme granuleux ; mais tandis que le noyau de l'oosphère est bien sphérique, celui des synergides est plutôt lenticulaire, comme le montre, sur la figure, celui de la synergide de droite qui est vue de profil. Le noyau de l'oosphère n'est pas plus gros que ceux des cellules de l'*Ep. N.* (6 μ).

Ceux des antipodes sont plus petits ; ils renferment également un nucléole. Ces trois corps cellulaires ont un protoplasme très granuleux. Le plus inférieur est le plus petit ; il est claviforme ; les deux autres présentent l'aspect de corps sphériques pédicellés, insérés sur les cellules du nucelle qui forment l'hypostase. Très à l'étroit dans le fond rétréci du sac embryonnaire, les antipodes sont obligées de se disposer à la suite les unes des autres ; leur corps est beaucoup mieux délimité que celui des synergides.

Enfin, entre les trois corps cellulaires du bas et les trois du haut du sac embryonnaire, mais beaucoup plus rapproché de ceux-ci, se trouve le noyau secondaire du sac. Il est beaucoup plus volumineux que celui de l'oosphère ; il a plus de 8 μ de diamètre et il renferme un nucléole aussi gros que le noyau des antipodes. Mais il n'est pas plongé à même le protoplasme du sac embryonnaire ; de même que les autres noyaux dépendent d'un corps cellulaire propre, de même le noyau secondaire occupe le centre d'un corps protoplasmique particulier délimité par une membrane albuminoïde et qui mérite d'être considéré comme une cellule autonome à laquelle je propose de donner le nom de *cellule secondaire*. Elle est ovoïde et mesure 15,5 μ de longueur sur 9,6 de largeur. Son protoplasme est beaucoup

moins granuleux que celui de la masse centrale du protoplasme du sac qui l'entoure.

Le corps protoplasmique du sac embryonnaire présente une disposition remarquable que j'ai retrouvée assez souvent pour pouvoir la considérer comme étant un cas normal chez le *Polygonum aviculare :* Il comporte : 1° une masse centrale entourant la cellule secondaire; cette masse n'occupe pas, à la vérité, le milieu du sac, mais est fixée aux deux tiers de sa hauteur ; elle est donc beaucoup plus rapprochée de l'oosphère que des antipodes. De cette masse rayonnent : 2° des cordons protoplasmiques dont l'un, très épais et court, la relie au protoplasme entourant les synergides et l'oosphère ; un autre, un peu moins épais mais plus long, va s'épancher autour des antipodes et un certain nombre d'autres plus minces encore relient latéralement la masse centrale à l'utricule pariétale qui épouse la forme du sac embryonnaire.

Sous ce dernier, une dizaine de cellules se distinguent des autres cellules voisines du nucelle par leurs dimensions un peu plus grandes et par leurs membranes un peu plus épaisses et réfringentes ; elles marquent le début de la différenciation de l'*hypostase ;* elles sont au niveau de l'insertion des téguments sur le nucelle et confinent par conséquent à la chalaze. A celle-ci aboutit un faisceau conducteur encore à l'état procambial qui, comme nous l'avons vu plus haut (p. 19), est fourni par le faisceau placentaire D.

Déjà à ce stade, on peut remarquer que le tissu accompagnant le faisceau conducteur se dilate au-dessous de la chalaze sous forme d'une coupe dont les bords s'éteignent sous l'insertion de la primine (fig. 10, dessin d'ensemble).

§ 3. — Développement de l'ovule après la fécondation.

L'acte de la fécondation semble prendre un temps relativement considérable pour s'accomplir. En effet, nous avons vu que dans une fleur récemment épanouie, l'ovule apte à être

fécondé mesure $0^{mm}5$ de longueur. Ajoutons qu'à ce moment l'ovule remplit parfaitement la cavité ovarienne (fig. 10) et que, par conséquent, le micropyle touche le tissu conducteur du style, ce qui permet au tube pollinique de passer directement de celui-ci dans celui-là.

A partir de ce dernier instant jusqu'à la maturité complète de la graine, les modifications qui frappent les diverses parties de l'ovule et les phénomènes qui les accompagnent sont assez nombreux et importants pour que nous nous voyions obligé de les considérer à diverses étapes entre ces deux périodes extrêmes, et comme ce sont ceux affectant le sac embryonnaire et ses dépendances qui régissent les autres, il est naturel de les envisager en premier lieu.

A. Dès que le tube pollinique entre en contact avec l'*Ep. N.*, l'ovule et surtout l'ovaire prennent un accroissement rapide, à tel point que lorsque l'ovule atteint $0^{mm}75$ de longueur sur $0^{mm}25$ de largeur, l'ovaire mesure le double et sa cavité interne a $0^{mm}9$ de longueur; le sac embryonnaire est long de $0^{mm}45$ et, à ce stade, les phénomènes de la fécondation ne sont pas encore arrivés à la phase active (fig. 17 et 18). En effet, le tube pollinique est entré dans le sac embryonnaire en se frayant un passage entre les deux cellules de l'*Ep. N.* se trouvant en face du canal micropylaire. Une de ces cellules semble avoir subi un commencement de désorganisation, puisqu'on ne lui voit plus de noyau. Le noyau végétatif du tube pollinique s'est arrêté à la base de l'appareil synergique; il a pris une forme vermiculaire. Un des noyaux générateurs, très petit, est arrivé au contact du noyau de l'oosphère, mais ils sont encore au stade de repos. L'oosphère n'a guère changé de dimensions. L'autre noyau générateur s'est avancé au devant du noyau secondaire du sac en cheminant le long du cordon protoplasmique antérieur, qui s'est considérablement allongé, en même temps que le noyau secondaire s'est d'autant éloigné de l'oosphère. Car, tandis que lors de la floraison (fig. 11), ces deux derniers noyaux n'étaient séparés que d'une longueur de $0^{mm}015$, au

stade actuel ils le sont de 0^{mm}134. Le second noyau générateur et le noyau secondaire sont à la prophase de la division nucléaire. Il semble donc en devoir résulter que la formation de l'albumen est légèrement en avance sur celle de l'embryon.

Quant aux synergides, dont une seule est à peine visible, sur la figure, à droite de l'oosphère, l'autre étant cachée derrière elle, elles sont déjà en voie de régression.

Les antipodes se sont sensiblement agrandies, surtout celle qui se trouve en avant et que nous nommerons désormais la supérieure. Leur protoplasme est très dense et leurs noyaux se sont considérablement agrandis en prenant des formes irrégulières, comme s'ils étaient prêts à subir une fragmentation.

Les *téguments* montrent toujours leurs assises au complet avec les caractères qu'ils avaient précédemment. Cependant, le protoplasme des cellules de l'*Ep. e. S.* devient plus aqueux, plus clair que celui des couches voisines.

A l'*Ep. N.*, au contraire, le protoplasme devient tellement dense et granuleux que les noyaux s'y distinguent à peine. De même dans le *Tf. N.* le protoplasme s'accentue davantage; mais ce tissu se résorbe de plus en plus dans la moitié antérieure, de sorte que le sac embryonnaire est largement en contact avec l'*Ep. N.* Cependant, il subsiste encore quelques cellules du *Tf. N.* autour des synergides qu'elles suivent dans leur résorption.

Tous ces tissus tégumentaires subissent, dans le sens transversal, des recloisonnements actifs, surtout vers la base.

On remarque aussi que l'*hypostase* se différencie nettement. Elle forme un disque de l'épaisseur de deux cellules, en moyenne, isolant le *Tf. N.* de la chalaze, celle-ci restant en contact avec l'*Ep. N.*, la secondine et la primine. Non loin de celle-ci aboutissent les dernières ramifications du faisceau ovulaire, lesquelles sont encore à l'état procambial.

B. Le noyau mâle finit par entrer en copulation avec le noyau de l'œuf. Le résultat de cette fécondation est la formation d'un embryon composé de deux cellules séparées par une

cloison transversale par rapport au grand axe. La cellule supérieure formera le suspenseur, l'inférieure donnera naissance à l'embryon proprement dit.

La cellule primordiale du suspenseur se divise de nouveau en deux par une cloison transversale. La cellule primordiale de l'embryon prend une cloison perpendiculaire.

Ensuite, les deux cellules de l'embryon se divisent, chacune en deux, par une cloison transversale. Une nouvelle bipartition provoque aussitôt, par la formation de cloisons longitudinales, dans un plan perpendiculaire aux précédentes, l'existence d'un embryon à huit cellules. Les quatre cellules du sommet entrent de nouveau en division transversalement, tandis que les quatre cellules de la base restent momentanément indivises. En même temps les deux cellules du suspenseur qui sont restées à l'état de repos jusqu'ici se recloisonnent, la supérieure, c'est-à-dire celle qui confine à l'*Ep. N.*, transversalement, l'inférieure longitudinalement. Des deux cellules issues de la première, la supérieure, plus petite et plus étroite, forme bientôt un crampon attachant le suspenseur à l'*Ep. N.* et l'inférieure devient assez grande et contribuera seule, par des recloisonnements successifs, à l'allongement ultérieur du suspenseur. Les deux cellules issues de la seconde sont destinées à former l'*hypophyse*, sur le rôle de laquelle Hanstein (43) et plus récemment Souèges (101) se sont longuement étendus.

On arrive ainsi à la constitution de l'embryon tel qu'il se présente dans la figure 23 (coupe longitudinale dans un ovaire de près de 2 millimètres). L'ovule a alors près d'un millimètre de longueur sur une largeur de $0^{mm}253$. Le sac embryonnaire a atteint $0^{mm}53$ de longueur ; il renferme un protoplasme pariétal polyplastique parsemé de noyaux nucléolés à peu près équidistants. Vers la base rétrécie du sac, de minces cordons protoplasmiques traversent la région vacuolaire médiane du sac. Les synergides sont presque totalement résorbées; elles bordent la cellule-crampon du suspenseur. Les antipodes sont au même état où nous les avons vues précédemment. On ne voit plus de trace de cellules du *Tf. N.* dans la région micro-

pylaire du sac. Celui-ci confine de plus en plus largement avec l'*Ep. N.*

Peu de changements dans l'aspect et la constitution des téguments : l'*Ep. i. P.* se fait remarquer par son protoplasme chargé de grosses granulations, tandis que les cellules de l'*Ep. N.* présentent toujours un protoplasme abondant et un gros noyau sphérique.

L'hypostase prend de plus en plus d'extension.

C. Ovaire et ovule continuent de grandir, tandis que l'embryon s'accroît lui-même sans trêve, en prenant d'abord la forme sphérique, et que l'albumen s'organise en direction centripète.

Dans un ovule de $1^{mm}35$ de longueur (fig. 28, 29, 30 et 31), l'embryon a $0^{mm}08$ de diamètre. Il est parfaitement sphérique ; le dermatogène y est déjà bien caractérisé. On distingue nettement les deux cellules hypophysaires auxquelles fait suite vers la voûte du sac embryonnaire une file de quatre cellules formant le suspenseur proprement dit : d'abord deux cellules discoïdes, une troisième beaucoup plus grande et à grande vacuole que l'on pourrait qualifier de cellule nourricière, enfin une quatrième qui est la cellule-crampon. Celle-ci justifie très bien le nom que je lui donne par le fait qu'elle enfonce, entre les cellules de l'*Ep. N.* formant la voûte, des prolongements cellulaires, véritables crampons par lesquels le suspenseur fixe l'embryon au sommet du sac.

L'albumen s'organise activement en tissu qui se développe de la périphérie vers le centre ; celui-ci n'est pas encore comblé que déjà on peut constater des différenciations dans les cellules. D'abord tout à la périphérie s'étend une assise de cellules rectangulaires presque sans vacuoles dont l'axe externe-interne est un peu plus court que les deux autres ; c'est la future assise protéique. Au-dessous, sont des cellules allongées vers l'intérieur, présentant un contenu protoplasmique creusé de vacuoles. Bordant la cavité centrale, existent des cellules plus petites, à protoplasme vacuoleux, qui se divisent activement.

Enfin, entourant étroitement l'embryon, se trouvent des cellules plus petites en général que les autres cellules de l'albumen. Parfois les cellules rangées contre l'embryon prennent l'aspect d'un épithélium. Il y a lieu de noter qu'actuellement rien ne différencie la nature du protoplasme de toutes les cellules de l'albumen.

Quant aux antipodes, elles méritent une mention spéciale. La première qui occupe l'extrême fond du sac, s'est peu agrandie et a pris une forme conique, la pointe en bas; son noyau resté unique est en voie de résorption. La seconde a un peu plus augmenté de volume et son noyau s'est fragmenté en deux parties, dont l'une montre également une tendance à se résorber, tandis que l'autre, contenant un nucléole, présente des signes d'activité très manifestes. La supérieure a pris un développement considérable en forme d'ampoule dont le centre est occupé par une grande vacuole entourée par un corps protoplasmique dense divisé en trois portions, résultat sans doute d'une légère plasmolyse, mais qui s'amincit en tous cas beaucoup dans la région en contact avec l'albumen. Le noyau de cette antipode s'est divisé par fragmentation en une vingtaine de noyaux de grosseurs variables, les uns en voie de résorption, les autres, munis de nucléoles, montrant une activité persistante, puisqu'ils continuent à se fragmenter.

Dans les téguments, on remarque ce qui suit :

Primine : *Ep. e. P.* ; les cellules s'allongent longitudinalement ; leur contenu devient de plus en plus clair.

Ep. i. P. ; les cellules sont allongées transversalement ; leur contenu est toujours dense.

Secondine : *Ep. e. S.* résorbé en grande partie; là où elles subsistent, les cellules sont vides.

Ep. i. S. se comporte comme l'*Ep. i. P.*

Nucelle : *Ep. N.* Il se fait remarquer par ses cellules riches en protoplasme chargé de substances albuminoïdes. Au voisinage de la voûte du nucelle, les cellules de l'*Ep. N.* conservent leur forme un peu papilleuse et assez petite (fig. 29),

tandis qu'ailleurs, les cellules sont assez grandes et larges, plus ou moins tabulaires; elles occupent une épaisseur au moins égale à l'ensemble de la primine; leurs parois transversales sont très minces et, dans les régions moyenne et basilaire, on constate que les noyaux s'allongent dans le sens de l'axe de l'ovule et montrent souvent en leur milieu un étranglement, chacune des deux parties présentant un nucléole, ce qui semble indiquer que ces noyaux se préparent à se diviser par simple fragmentation (fig. 30).

Tf. N. Il se résorbe de plus en plus. Il n'intéresse plus que le tiers inférieur du nucelle (fig. 28 et 31); mais les cellules qui subsistent et qui dans leur ensemble forment un tissu en entonnoir renferment toujours un contenu abondant.

L'hypostase occupe toute la région chalazienne, à part une lisière en forme de verre de montre comportant une épaisseur de deux ou trois cellules à contenu dense qui tapisse intérieurement les tissus vascularisés. L'hypostase est constituée par des cellules assez grandes, à parois fermes et à contenu très clair; les noyaux y occupent toujours une position pariétale. Vers ses bords, elle est séparée de la lisière de cellules à contenu dense par une ou deux couches de cellules vides qui sont dans le prolongement des assises de la secondine; tout à la base, les cellules de l'*Ep. N.* en contact avec ces cellules vides sont elles-mêmes vides sur une hauteur de deux ou trois cellules. D'autre part, il semble bien qu'il n'y a aucun rapport osmotique entre les cellules du *Tf. N.* et celles de l'hypostase, qui ne sont pas en contact non plus avec les cellules actives de l'*Ep. N.* La lisière de cellules à contenu dense s'évanouit par ses bords au contact des cellules qui prolongent vers le bas l'*Ep. i. P.*.

Le centre de l'hypostase est occupé par des séries de cellules plus grandes que les autres et mettant en rapport les cellules de la lisière avec les antipodes qui viennent se greffer sur les dernières cellules de ces séries en s'insinuant entre un petit groupe de cellules riches en protoplasme très granuleux et dont l'aspect est tout différent de celui des cellules du *Tf. N.* Ces cellules ne tardent d'ailleurs pas à disparaître par résorp-

tion. Il est probable qu'elles ont pour origine les cellules du *Tf. N.* sur lequel reposait le fond du sac embryonnaire, comme le montre la figure 25.

En résumé, dans l'état actuel tout se passe dans l'ovule comme si :

a) L'*Ep. N.* et le *Tf. N.* restent en rapport osmotique et sont isolés de tous les autres tissus vivants y compris les antipodes (fig. 31).

b) L'embryon est en rapport osmotique avec l'*Ep. N.* par l'intermédiaire du suspenseur; aucun échange osmotique ne semble se manifester entre l'embryon et l'albumen (fig. 29).

c) Le faisceau ovulaire s'irradie au-dessous de la chalaze en sept ou huit branches (fig. 32) qui se dirigent vers la primine. Ce tissu vascularisé fournit des matériaux nutritifs à la lisière de cellules à contenu dense qui se continue vers la primine (fig. 28).

d) Les cellules de cette lisière sont en relation osmotique avec les antipodes par l'intermédiaire des séries centrales des cellules de l'hypostase.

e) Des échanges osmotiques s'établissent entre les antipodes et l'albumen.

Ces constatations serviront à établir plus loin des conclusions sur le rôle physiologique des diverses parties de l'ovule.

D. L'ovule poursuivant sa croissance est le siège de changements assez notables pour nous y arrêter quand il atteint une longueur de $1^{mm}65$.

L'embryon (fig. 34) est pourvu d'un suspenseur filamenteux composé de sept cellules, non compris l'hypophyse. Celle-ci fait corps avec l'embryon proprement dit; elle constitue le point de départ du dermatogène. On distingue nettement la démarcation entre l'histogène du parenchyme cortical et celui du cylindre central. Le parenchyme cortical, formé d'une assise de cellules sous-épidermiques suivant les côtés de l'embryon, se continue par une assise sous le sommet élargi; mais suivant deux points opposés du bord de ce sommet, on voit se produire

un recloisonnement tangentiel des cellules de ce parenchyme, prélude de la formation des cotylédons.

A ce stade l'albumen a fini par combler sa cavité centrale (fig. 33); les cellules de son assise externe se recloisonnent tangentiellement; d'ailleurs les cellules profondes de l'albumen sont aussi susceptibles de recloisonnements par la voie mitotique.

Dans les téguments (fig. 35), l'*Ep. e. S.* se résorbe de plus en plus; à l'endostome, les cellules commencent à subériser leurs parois.

A l'*Ep. N.* la fragmentation des noyaux se poursuit assez activement; les cellules continuent de grandir et de s'épaissir.

E. Dans un fruit de $2^{mm}8$, presque arrivé à sa taille définitive (fig. 36), l'ovule atteint $1^{mm}77$ environ.

Il y a lieu de noter que jusqu'ici, nous avons compris dans la mesure de l'ovule la partie amincie de celui-ci, laquelle s'étend, sur une longueur de $0^{mm}3$, depuis la chalaze jusqu'à l'insertion de l'ovule sur le fond parenchymateux de l'ovaire et qui est en définitive le placenta. Nous n'avons guère prêté d'attention à ce dernier tissu, bien qu'il présente, au stade qui nous occupe, une profondeur de $0^{mm}66$ depuis le fond de la cavité de l'ovaire jusqu'au niveau de l'insertion de ce dernier. En effet, ce tissu est un parenchyme qui n'affecte aucun caractère spécial; il n'est ni amylogène, ni chlorophyllien; peut-être fonctionne-t-il, à l'occasion, comme tissu aquifère, ce qui justifierait les grandes dimensions des cellules qui le composent; mais au stade présent, ses cellules commencent à subériser leurs parois. C'est en son milieu que s'allonge le faisceau ovulaire qui se continue jusqu'à la chalaze tout le long et au milieu de la partie basilaire amincie de l'ovule, autrement dit au milieu du funicule.

Par suite de la croissance de l'ovule proprement dit, le funicule se replie en *S* et, dès les débuts de ce repli, subit un étranglement à un niveau peu éloigné du placenta (fig. 36 en *h*) ou s'opérera plus tard le détachement de la graine.

Au stade considéré, l'embryon a pris un notable accroissement; toujours attaché au suspenseur formé de sept cellules en une seule série, il mesure $0^{mm}227$ de longueur. On y distingue nettement, au point de vue histologique, trois régions : *a*) l'épiderme, dont les initiales sont formées par l'hypophyse,au voisinage de laquelle les cellules épidermiques montrent un recloisonnement tangentiel qui forme la première assise de la coiffe; *b*) le parenchyme cortical, présentant trois assises de cellules et formé par trois initiales en deux étages; *c*) le cylindre central, comprenant sept assises. Les lobes cotylédonnaires sont nettement marqués et l'on peut même y suivre les prolongements des trois histogènes (fig. 37).

L'albumen accuse une phase importante de son évolution : c'est le début de la formation des grains d'amidon. Ceux-ci se présentent dans toutes les cellules, sauf 1° dans celles qui sont au voisinage immédiat de l'embryon, notamment à sa base, où elles affectent une disposition particulière (fig. 37); 2° dans celles qui touchent à la grande cellule antipode, lesquelles renferment un protoplasme très dense chargé de matières protéiques (fig. 38), ainsi que 3° dans celles qui, de forme tabulaire et disposées en une ou deux assises, constituent la couche périphérique et qui montreront bientôt un contenu de même nature que celui des précédentes avec lesquelles on pourra les identifier sous le nom d'*assise protéique*.

Les antipodes justifient bien leur nom ; leur ensemble constitue, en effet, le contrepied de l'embryon; les deux inférieures forment pour la supérieure un pédicelle conducteur analogue au suspenseur et qui est ancré dans l'hypostase; la supérieure n'a jusqu'ici cessé de grossir ; elle a toujours la forme d'ampoule; elle atteint une hauteur de $0^{mm}12$ et sa plus grande largeur est de $0^{mm}13$; elle est à l'apogée de son développement. Son protoplasme dense, renfermant une trentaine de noyaux en voie de fragmentation, circonscrit une large cavité vacuolaire au centre. Elle s'insinue par une pointe centrale entre les cellules de la première rangée de l'albumen (fig. 38).

Les téguments n'offrent pas de changements notables, si ce n'est que l'*Ep. e. S.* est complètement résorbé (fig. 43).

L'*Ep. N.*, toujours très actif, présente des cellules à parois transversales tellement minces qu'on ne les aperçoit pas dans les coupes dont le protoplasme n'est pas éliminé. Ces cellules, outre un protoplasme très granuleux, renferment, dans la partie moyenne et basilaire, plusieurs noyaux allongés, issus par division du noyau antérieur.

Quant au *Tf. N.*, il continue à se résorber de haut en bas.

F. Un peu plus tard, on constate que l'antipode supérieure diminue de volume. Elle entre en régression marquée tout en continuant de jouer un rôle actif (fig. 39) ; ses noyaux continuent, en effet, à subir des fragmentations répétées et multiples ; sa hauteur diminue ($0^{mm}09$), tandis qu'elle s'élargit davantage ($0^{mm}16$). Elle acquiert une forme hémisphérique, en même temps qu'elle s'insinue par plusieurs prolongements entre les cellules de l'albumen qui lui sont contiguës.

Celles-ci, plus petites que leurs congénères et remplies d'un protoplasme riche en matières protéiques, comme celui de l'antipode elle-même, sont le siège d'un recloisonnement actif. Derrière elles s'étend, avant d'arriver aux cellules d'albumen renfermant de l'amidon, un espace occupé par deux ou trois assises de cellules de plus en plus grandes, présentant un protoplasme réduit à une mince utricule pariétale englobant du suc cellulaire qui contient probablement en dissolution des polysaccharides autres que l'amidon (dextrines), mais où il n'y a jamais trace de glucose ni de saccharose, même dans les stades ultérieurs. En tout état de cause, il semble bien que ces cellules servent d'entrepôt à des substances ternaires dissoutes. Nous y reviendrons plus loin.

C'est à ce stade qu'il m'a surtout été donné de me rendre compte des relations de l'*Ep. N.* avec les tissus voisins (fig. 40). Séparé de l'*Ep. i. S.* par une paroi cuticularisée (fuschine, Cl Zn I), il ne peut avoir de rapports avec les dernières ramifications du faisceau qui s'éteignent à la base de la primine au niveau même où l'*Ep. N.* se spécialise, d'autant plus qu'il en est séparé, en outre, par l'hypostase, de sorte que, en un mot,

l'*Ep. N.* ne peut avoir aucune relation vers l'extérieur. Mais il est en rapport intime avec le *Tf. N.* dont les cellules, situées tout à fait à la base et en contact, en ce lieu, avec l'*Ep. N.*, présentent un contenu granuleux beaucoup plus dense que celui des cellules encore subsistantes du *Tf. N.* plus éloignées de cette région.

G. Plus tard, le funicule de l'ovule se recourbe en *S*, ce qui provient de ce que l'ovule continue de grandir, alors que l'ovaire est arrivé à sa taille définitive (fig. 44). Celui-ci mesure 3 millimètres de longueur, tandis que l'ovule sans le pédicelle en mesure 2. L'embryon commence à se courber pour poursuivre son accroissement dans une direction excentrique, sur le côté de l'albumen; il atteint à ce moment environ $0^{mm}45$.

H. Lorsqu'il atteint $0^{mm}75$, on remarque que les cellules de l'hypophyse se sont elles-mêmes recloisonnées tangentiellement et que le suspenseur s'est allongé et comporte dix cellules (fig. 46). L'ovule mesure alors $2^{mm}15$ sans le pédicelle qui s'est fortement recourbé (fig. 45).

L'albumen est très compact ; dans les grandes cellules de la région centrale l'amidon s'accumule en grains de plus en plus gros ; à la périphérie, les cellules plus petites, plus ou moins tabulaires, sont disposées en deux, trois ou même quatre assises et renferment un contenu protéique ; elles se continuent à la base en une assise de cellules en contact avec l'antipode. Mais derrière cette assise, on retrouve encore la région de trois ou quatre assises de cellules plus ou moins grandes de l'albumen dont le contenu consiste surtout en un liquide clair (fig. 47).

L'antipode continue à se résorber de même que ce qui reste du *Tf. N.*

L'*Ep. N.* montre toujours la même activité.

Les téguments sont encore représentés par les mêmes assises cellulaires : *Ep. e. P.*, *Ep. i. P.* et *Ep. i. S.* Toutefois l'*Ep. i. P.* est en voie de disparaître par l'écrasement de ses cellules.

I. Enfin l'ovule est arrivé au terme de sa croissance quand il atteint $2^{mm}23$. Il remplit parfaitement la cavité ovarienne et il en épouse la forme triquètre (fig. 48 et 52).

L'embryon, qui mesure $1^{mm}52$, est logé le long d'un des angles de l'ovule entre la partie protéique et la partie amylacée de l'albumen, la radicule sous la voûte micropylaire et l'extrémité des cotylédons au niveau de l'espace occupé, à la base de l'albumen, par les trois assises de grandes cellules presque vides. Jusqu'ici l'embryon est encore maintenu par le suspenseur en contact avec l'*Ep. N.* Les cellules hypophysaires se sont encore recloisonnées tangentiellement, de sorte qu'elles forment actuellement une pointe au-dessous du dermo-calyptrogène,qui lui-même comporte trois assises de cellules (fig.49). L'axe hypocotylé, intéresse les deux tiers de la longueur de l'embryon, le reste étant fourni par les cotylédons dont les cellules commencent à produire de la chlorophylle.

Comme il vient d'être dit, l'albumen présente à sa base un assez grand espace formé de trois assises de grandes cellules presque vides à parois très minces et présentant des indices manifestes de résorption. Cet espace est clos, vers le bas, par une assise de petites cellules semblables à celles des assises protéiques de la périphérie de l'albumen et qui sont en contact avec l'antipode.

Celle-ci s'aplatit de plus en plus ; elle est en voie de résorption, bien que son protoplasme granuleux périphérique renferme encore de nombreux noyaux.

Quant au *Tf. N.*, il est réduit à un mince disque de cellules toujours actives en contact, au fond du sac embryonnaire, avec l'*Ep. N.* encore actif également, l'hypostase s'opposant à tout autre rapport osmotique du *Tf. N.* (fig. 50).

Les cellules de l'*Ep. i. P.* et de l'*Ep. i. S.* s'étant vidées sont écrasées. Même celles de l'*Ep. e. P.* s'affaissent quelque peu, bien qu'elles renferment un suc cellulaire abondant dans lequel apparaît un pigment rouge qui devient bleu verdâtre sous l'action des bases (fig. 51).

K. Avant d'arriver à l'état de maturité parfaite, l'embryon s'accroît encore de manière à remplir complètement, avec la plus grande partie de ses cotylédons, la cavité que laissent finalement, à la base de l'albumen, les trois assises de grandes cellules à la résorption desquelles nous avons assisté, cavité qui reste enveloppée par une assise de cellules protéiques. Les cellules de l'assise la plus extérieure de la couche protéique de l'albumen voient leur contenu se résorber. Dans la partie amylifère du même tissu, il se produit également une légère différenciation entre les cellules de la région centrale et celles qui les entourent. Quand cet accroissement est achevé, le suspenseur, l'antipode et ce qui restait du *Tf. N.* sont résorbés entièrement.

L'*Ep. N.*, dont les cellules sont presque totalement vidées, subsiste, mais est écrasé.

La coloration du pigment des cellules de l'*Ep. e. P.* devient plus intense ; la paroi externe de ces cellules s'épaissit et les parois latérales deviennent sinueuses.

§ 4. — La Graine mûre.

Le spermoderme de la graine mûre est membraneux et de couleur rouge-brun. Il est formé par la Primine, la Secondine et le Nucelle (fig. 54).

Primine : *Ep. e. P.* à cellules allongées longitudinalement, à contours légèrement sinueux lorsqu'on les voit de face (fig. 58), à paroi externe épaissie, à parois interne et latérale minces, à couteau rouge-brun, facilement reconnaissables, même à sec.

Ep. i. P. fortement écrasé, difficile à gonfler, même par la potasse à chaud, visible de face après macération, sous forme de petites cellules allongées transversalement (fig. 59).

Secondine : *Ep. e. S.* résorbé.

Ep. i. S. comme *Ep. i. P.*, mais à cellules vues de face beaucoup plus petites encore et allongées longitudinalement (fig.60).

Nucelle : *Ep. N.* à cellules un peu allongées longitudinalement, à paroi externe épaissie, à parois interne et latérale minces, vides mais bien visibles, même dans une coupe faite à sec (fig. 62).

Tf. N. totalement résorbé.

Albumen farineux, amylacé, avec une mince couche protéique à la surface. Il comporte d'ailleurs :

a) Une assise externe que, pour abréger, nous désignerons par *e. A.* et qui est formée de cellules tabulaires, vides, à parois minces, parfaitement reconnaissables sur une coupe faite dans une graine mûre fraîchement récoltée (fig. 54), écrasée dans la graine sèche (fig. 62), mais qu'on peut faire réapparaître par la potasse même à froid (fig. 63).

b) Une ou deux assises de petites cellules tabulaires, à parois minces et à contenu protéique abondant, en abrégé *Prot.*

c) Un massif central de grandes cellules à parois minces, un peu allongées dans le sens radial, renfermant de l'amidon et dans lequel on peut distinguer deux régions :

α) Une région extérieure plus opaque, formant un tissu très cohérent, à contenu très dense constitué par de l'amidon en grains assez petits, en abrégé *A. e.*

β) Une région centrale plus claire, à cellules facilement dissociables, contenant de l'amidon en grains plus gros et moins tassés (fig. 52 et 64), en abrégé *A. i.*

Embryon latéral, arqué, longeant un des bords de la graine triquètre; son plan coïncide avec la bissectrice de cet angle (fig. 52).

A vrai dire, c'est l'axe hypocotylé et la moitié inférieure des cotylédons qui sont ainsi arqués. L'autre moitié des cotylédons est brusquement pliée à angle plutôt aigu que droit, pour s'introduire dans la poche creusée à la base de l'albumen ainsi que nous l'avons vu antérieurement (fig. 65).

Un tel embryon mesure environ $2^{mm}4$ en le supposant droit.

La graine reste attachée au fond du fruit par un funicule fortement recourbé.

CHAPITRE III.

NOTE CRITIQUE ET HISTORIQUE.

Selon Payer (79, p. 292), à l'origine, le pistil se compose, dans toutes les Polygonées à fleur ternaire, de trois mamelons qui « en croissant s'élargissent par leur base, deviennent connés et forment une sorte de coupe bordée de trois pointes ». On peut accepter cette explication, bien qu'en réalité les trois mamelons en question n'apparaissent guère au début, sur les bords de la coupe, que comme de très légères sinuosités, c'est-à-dire qu'il n'y a guère de délai entre l'apparition de la coupe et celle de ces sinuosités. Celles-ci, s'accentuant par la suite, deviennent de véritables mamelons. « Au fond de cette coupe », continue Payer, « on aperçoit le sommet de l'axe qui se revêt successivement de deux enveloppes et constitue un ovule dressé et orthotrope ». Dans l'exposé qui précède, nous avons fait valoir les raisons qui nous font rejeter l'opinion d'après laquelle l'axe floral deviendrait l'ovule. Réfutée par Van Tieghem (114), Celakowsky (13 et 14) et Warming (126), elle semblait être abandonnée par tous les botanistes qui, à l'exemple d'Eichler (20), après l'avoir acceptée, s'étaient par la suite rangés à l'avis des trois auteurs cités. Je n'y aurais pas insisté si Coulter et Chamberlain (17) n'avaient rouvert le débat en soutenant qu'il y a des ovules foliaires et des ovules caulinaires et que ces derniers sont ou terminaux ou latéraux. « Dans le premier cas », ajoutent ces auteurs (p. 46), « le sommet de l'axe devient le nucelle, comme c'est probablement vrai pour la plupart des ovules orthotropes et certainement chez *Naias*, *Zanichellia*, *Lilaea*, Pipéracées, Juglandacées, Polygonacées et autres ». A leur suite d'autres auteurs admettent, avec

quelque réserve, il est vrai, qu'il y a des ovules de nature axile ; c'est le cas, notamment, de Servettaz (93, p. 351). Il est toutefois surprenant de voir ce dernier en contradiction avec lui-même, quand il dit, à la page 357, que l'origine de l'ovule se rattache aux feuilles. D'ailleurs on peut relever d'autres erreurs d'interprétation dans ce travail, par exemple au sujet de l'assise épithéliale dans le sens que lui donne Mlle Goldflus (27).

Je n'ai pas l'intention, pour le moment du moins, de reprendre cette discussion sur la valeur morphologique de l'ovule dans son acception générale. Mais en ce qui concerne celui du *Polygonum aviculare*, je rappelle ce que j'ai dit plus haut (v. pp. 12 et 23) en exposant les premiers développements du péricarpe et du spermoderme : « Le sommet végétatif de l'axe floral s'arrête dans sa croissance; il s'aplanit momentanément au point qu'il semble même s'invaginer très légèrement. Cela résulte de la formation, à l'endroit du sommet, d'un rebord circulaire qui prend aussitôt un développement rapide; mais à peine le rebord est-il formé que le sommet reprend sa forme convexe (v. p. 12). « Cependant on s'aperçoit bientôt que ce sommet ne continue plus parfaitement l'axe floral, car sa base empiète légèrement sur le rebord du côté où s'est formée la proéminence, ébauche du stigmate, en avance sur les deux autres. En réalité, il ne peut être question ici de sommet végétatif, mais bien de l'ébauche de l'unique ovule que renferme l'ovaire... ; il dépend de celui des trois carpelles qui prédomine pendant tout le cours du développement de l'ovaire. » (V. p. 23).

En retraçant ainsi la genèse des carpelles et de l'ovule du *Polygonum aviculare*, j'ai calqué, semble-t-il, la description qu'a donnée Warming du même phénomène chez le *Ficus Carica* (126, p. 184) dont l'ovule est aussi « terminal », mais devient anatrope. D'autre part, cet auteur a trouvé que dans le *Rheum*, les carpelles sont égaux et le restent et que l'ovule « est rigoureusement apical ». Je ne veux pas en disconvenir à cette place; mais il est évident que si le savant professeur de Copenhague avait pu observer, chez le *Rheum*, les mêmes dispositifs que ceux que j'ai constatés chez le *Polygonum avicu-*

lare, il aurait rangé cet ovule dans la même catégorie que celui du *Pouzolzia* et il aurait conclu, comme Van Tieghem (118, p. 396), qu'une étude attentive montre que l'ovule est en réalité latéral et non terminal, que son attache a lieu non sur le pédicelle, mais sur l'un des carpelles à sa base.

D'ailleurs il convient de remarquer que les affirmations de Coulter et Chamberlain, sur les cas signalés par eux, ne reposent pas sur des observations personnelles ; ils se basent sur les recherches faites autrefois par Payer (79), Strasburger (105 et 106), Braun (5), etc., et il est étonnant qu'après des argumentations aussi solides que celles que l'on rencontre dans les travaux de Celakowsky, de Van Tieghem et surtout de Warming, les auteurs américains aient pu ressusciter l'idée qui fait l'objet de cette critique et il est plus étonnant encore que Warming, dans un mémoire récent (127), n'ait pas cru devoir relever cette tentative.

Il y a donc lieu d'admettre que, chez le *Polygonum aviculare*, l'ovule est d'origine foliaire, étant donné qu'il est une dépendance du carpelle et que le carpelle n'est qu'une feuille transformée. Je suis même porté à croire qu'il en est ainsi dans tous les cas, même quand les carpelles semblent faire défaut, car alors on peut conclure qu'ils existent en puissance. Mais quant à décider si l'ovule a, oui ou non, la valeur d'un bourgeon, c'est une autre question qu'il est inopportun d'envisager ici, mais au sujet de laquelle je ne puis m'empêcher de rappeler des observations que j'ai faites autrefois sur des bulbilles adventives, nées sur des morceaux de tuniques du bulbe de l'*Ornithogalum caudatum* Ait. et dont « le mode de formation présente une curieuse analogie avec celle d'ovules orthotropes » (66, p. 70).

Que l'ovule et non seulement l'ovule, mais le pistil tout entier, n'est pas le résultat de la transformation de l'axe floral, mais est un appendice de cet axe, c'est ce que démontre l'observation de la différenciation et du parcours des cordons libéro-ligneux dans le pédoncule et dans l'hypanthe chez le *Polygonum aviculare*. Il est indiscutable que, si c'est l'axe lui-même

qui se transforme en ovule, les éléments anatomiques et notamment les faisceaux libéro-ligneux de l'un doivent se transmettre intégralement et directement à l'autre, réserve faite des particularités qu'offre la course des faisceaux libéro-ligneux à l'endroit des nœuds. Or il n'en est rien dans le cas qui nous occupe.

Les éléments ligneux commencent à se différencier, dans les carpelles et dans le pédicelle de l'ovule ou funicule, peu de temps avant l'anthèse. A ce moment, ces éléments, dans le pédoncule, ne sont pas encore accompagnés des fibres ponctuées qui, plus tard, viennent gêner leur observation (fig. 19). Une coupe transversale dans le haut du pédoncule nous renseigne qu'il s'y trouve parcouru par quatre faisceaux. Au niveau de la base organique de l'hypanthe, en *a*, ces faisceaux s'arrêtent dans leur course axiale; ils se bifurquent tangentiellement, s'incurvent vers l'extérieur de manière à se rendre dans les pièces du périanthe. Les quatre faisceaux internes se rapprochent de la face interne de l'hypanthe et, au niveau de l'insertion du pistil, présentent, en *b*, un massif formé de trachées courtes d'où ils envoient chacun, vers le bas, une ramification; celle-ci contourne la commissure d'insertion du pistil et, en *c*, reprend une direction axiale pour s'introduire dans ce dernier, où elle va occuper l'angle d'un des trois carpelles, à moins qu'il ne s'agisse du faisceau placentaire qui, aussitôt entré dans le pistil, se bifurque en deux branches dont l'une est destinée à l'ovule. Plus tard, lorsque la fleur est fécondée de quelque jours (fig. 19^{b}), il s'établit entre les faisceaux C et A une communication plus directe, bien qu'oblique, par la différenciation d'un tissu fibreux dont les éléments prennent tous les caractères de trachées courtes. C'est ce que Strasburger (**105**, planche III, fig. 22) a assez bien représenté également en ce qui concerne le *Polygonum divaricatum*. Seulement son interprétation du parcours des faisceaux manque de clarté (p. 9) : « Trois faisceaux abandonnent l'axe floral pour entrer dans la région médiane des carpelles; ils sont immédiatement suivis par trois autres, alternant avec les

premiers et qui vont dans les commissures. Alors les trois faisceaux restants de l'axe s'infléchissent pour se rassembler vers le milieu de la coupe transversale et s'unissent plus ou moins complètement par leurs trachées en un faisceau unique qui s'élève en droite ligne vers le haut, entre dans le funicule de l'ovule et s'éteint dans la chalaze au-dessous du nucelle ». — Faut-il donc comprendre qu'il y a dans le pédoncule six faisceaux dont trois concourent à la formation du faisceau ovulaire en restant indépendants de tous les autres ? Cela me paraît peu probable et n'est, en tous cas, pas applicable au *Polygonum aviculare*, où j'ai minutieusement observé et décrit le parcours des faisceaux.

Il n'y a donc pas passage direct du pédoncule ou axe floral dans le pistil. Celui-ci avec son ovule constitue donc bien une « création nouvelle », selon l'expression de Warming (126), au-dessous de laquelle nous pouvons dire, en empruntant les termes de Van Tieghem (115), que l'axe floral s'évanouit.

* * *

Considérant le nombre des assises cellulaires du péricarpe, nous avons signalé, à la page 12, qu'il était de 5 dans les parties minces et de 10 dans les parties épaisses de la paroi ovarienne très jeune ; ces dernières parties sont celles qui deviendront les angles de l'akène trigone ; elles seront les sièges des faisceaux libéro-ligneux ; déjà d'ailleurs nous avons remarqué que l'accroissement du nombre des assises se fait aux dépens du *Tf. m.* Plus loin, à la page 13, nous voyons que des massifs de procambium se sont formés dans le *Tf. m.* (fig. 15) ; c'est la confirmation de ce que nous avons vu ailleurs (65, p. 13, fig. 8, 33 et 291).

Gr. Kraus (57), parlant du fruit du *P. aviculare*, dit qu'il est construit d'une manière tout à fait semblable à celui du *P. Persicaria L.* dont il se borne à figurer une coupe transversale de l'ovaire et une cellule de l'*Ep. e.* du péricarpe, une en coupe transversale et une pareille vue de face. Celle-ci a un contour beaucoup plus profondément sinueux que dans le

P. aviculare; de plus, sa paroi externe est beaucoup plus mince que nous ne l'avons vu.

Emma Sirrine (97) a examiné quatorze espèces de Polygonées, parmi lesquelles les *Polygonum virginianum* L., *P. Convolvulus* L., *P. dumetorum* var. *scandens* Gray, *P. Hydropiper* L., *P. erectum* L. et *P. Persicaria* L. Examen superficiel s'il en fut, car il ne s'adresse qu'à une faible portion d'une coupe transversale d'un côté de l'akène mûr, pratiquée sans aucune précaution, comme le dénote l'état de dislocation des cellules de l'albumen sur les figures. D'ailleurs celles-ci, pas plus que les descriptions, n'ont guère de valeur, car elles révèlent les unes comme les autres un souci de simplification poussé à l'extrême. Évidemment ce sont les cellules de l'*Ep. e.* palissadique qui ont surtout absorbé l'attention de l'auteur. Au-dessous de celles-ci, le péricarpe comporte quatre assises de petites cellules arrondies que l'auteur dessine toutes semblables, disposées en séries radiales avec de grands méats entre elles ; c'est notre *Tf ;* mais il n'y a pas de trace, dans le dessin pas plus que dans la description, de cellules écrasées. Entre ces cellules « subpalissadiques » et les grandes cellules de l'albumen, il n'y a qu'une seule assise de toutes petites cellules en « forme de chaîne ». C'est la quintescence du spermoderme dans la composition duquel entrent, comme nous l'avons vu, du moins pour le *P. aviculare*, l'*Ep. e. P.* bien reconnaissable, les *Ep. i. P.* et *Ep. i. S.* écrasés en une lame mince, et l'*Ep. N.* bien visible aussi. Quant à l'assise protéique de l'albumen, il n'en est pas question.

Joxe (55) a observé, à un point de vue très spécial, il est vrai, les péricarpes de diverses Polygonées dont du genre *Polygonum*, les *P. Persicaria, P. Hydropiper, P. aviculare, P. Convolvulus* et *P. orientale.* Son exposé ne se rapporte qu'à la constitution de l'*Ep. e.* du péricarpe. Mais généralisant à l'extrême, il attribue à tous les *Polygonum* un épiderme identique, en décrivant celui que figure un dessin qui accompagne son exposé et dont il ne nomme pas l'espèce à laquelle il s'applique, mais qui est sans conteste le *P. Persicaria.*

Harz (44) s'occupe, entre autres, du *P. tinctorium Willd.*, où il trouve au péricarpe, au-dessous d'un épiderme formé de cellules très épaisses, peu allongées, hautes et larges de 33 μ, une couche brune presque aussi épaisse (28 μ) consistant en trois à cinq assises de cellules sclérifiées, ponctuées et allongées transversalement, suivies d'un petit nombre d'assises parenchymateuses vasculifères et de l'épiderme interne. Le spermoderme brun foncé est semblable, d'après Harz, à celui de *Fagopyrum*, auquel il attribue un *Ep. e. P.* à grandes cellules à parois brun jaunâtre et sinueuses, la paroi externe étant un peu plus épaissie que les autres.

L'*Ep. i. P.*, l'*Ep. e. S.* et l'*Ep. i. S.*, à cellules à parois minces sont comprimés, sous l'*Ep. e. P.*, en une membrane mince peu perceptible. L'albumen présente une ou deux assises protéiques à la périphérie, au-dessous desquelles s'étendent la masse des grandes cellules à amidon, facilement dislocables.

Il est intéressant de noter, d'après cette description, la présence d'un tissu hypodermique protecteur au péricarpe, chez un *Polygonum*. Je me réserve de vérifier le fait.

* * *

Strasburger (105) a décrit et figuré les stades successifs du développement de l'ovule du *Polygonum divaricatum* jusque dans la fleur épanouie; nos descriptions concordent absolument, au point que j'ai cru pouvoir me dispenser de représenter certains stades figurés par cet auteur aux planches I et II de son mémoire. Cependant, tandis qu'il établit comme caractère constant le recloisonnement tangentiel des cellules de l'*Ep. N.* formant la voûte au-dessus du sac embryonnaire, je considère ce fait comme accidentel chez le *P. aviculare*, attendu que je ne l'ai constaté que dans un seul des nombreux ovules que j'ai examinés. Comme conséquence, il n'est pas question, dans notre espèce, que ces cellules obstruent jamais le micropyle qui y est toujours très étroit, alors que dans le cas étudié par

Strasburger (fig. 11) et dans ceux décrits par Schimper (108), Warming et Johanssen (128) et d'autres, il aurait un large orifice occupé par les cellules externes de la portion dédoublée de l'*Ep. N.* Souèges (103) décrit et figure une disposition analogue, mais beaucoup plus accentuée dans le *Polygonum Persicaria* L., où le nucelle est surmonté d'un appareil pénétrant à travers l'endostome, jusque dans l'intérieur du style. Guillaume (39) est absolument muet sur cette formation.

Le sac embryonnaire du *P. divaricatum* n'intéresserait guère plus que la moitié supérieure du nucelle; il serait assez large et non effilé en entonnoir vers son extrémité chalazienne; au fond de celle-ci, les trois antipodes seraient disposées de manière que la supérieure couvrirait les deux autres qui s'y trouvent côte à côte. Dans le *P. Persicaria* ce serait au contraire l'inverse, d'après Souèges (103) : une antipode inférieure couverte par les deux autres disposées à côté l'une de l'autre. J'ai insisté sur ce que dans le *P. aviculare* le sac embryonnaire occupe presque toute la longueur du nucelle, qu'il se rétrécit longuement du côté de la chalaze et que son fond, dans lequel les antipodes sont disposées à la suite les unes des autres, est presque au niveau de l'insertion des téguments. Notons, en passant, que la formation de cet entonnoir chalazien étroit et profond est loin de correspondre, dans le cas qui nous occupe, à la résorption des antipodes, comme Souèges (102) l'a fait remarquer à propos de l'*Adonis*.

Cette disposition remarquable des antipodes que je signale ici a été mise en lumière également par Huss (51) chez l'*Helleborus foetidus* (p. 102, fig. 17) et chez le *Cimicifuga racemosa* ou *Actaea Cimicifuga* (p. 112, fig. 40-42), par Coulter et Chamberlain résumant les constatations d'autres auteurs dans les Composées (17, p. 101) et par Schmid (90) dans diverses Scrophulariacées. Mais ne voulant pas anticiper sur la discussion des phénomènes accompagnant le développement de l'albumen et de l'embryon, je reviendrai plus loin sur le sort ultérieur des antipodes.

* * *

J'ai été amené à interpréter le noyau secondaire du sac embryonnaire autrement qu'on ne l'a fait jusqu'à présent. Se conformant à l'ancienne formule, Souèges (103) voit dans le *Polygonum Persicaria* « un très gros noyau secondaire, offrant, au sein d'un nucléoplasme assez clair, un nucléole et un nucléolule de grandes dimensions ». Or, d'après l'acception généralement admise depuis Strasburger (107), le nucléoplasme est un réseau de filaments délicats comportant une substance fondamentale homogène, le nucléo-hyaloplasme, et des granulations, les nucléo-microsomes. Ceux-ci fixent fortement les matières colorantes.

Appliquant la technique habituelle de la coloration des noyaux, j'ai pu me convaincre que ce que l'on considère d'ordinaire comme le noyau secondaire comporte en réalité deux parties bien différentes. Ce sont les procédés de coloration par la safranine, par le violet de gentiane et surtout par la fuschine- vert d'iode qui ont donné les meilleurs résultats. Par ce dernier moyen, j'ai toujours obtenu la coloration rouge pour le protoplasme du sac embryonnaire et vert bleuâtre pour les noyaux proprement dits, tant chez les synergides, œuf et antipodes, que dans le noyau secondaire ; les nucléoles offraient une couleur violacée tendant plus ou moins vers le rouge, tandis que la région aréolaire qui entoure le noyau du sac et que l'on a jusqu'ici considéré comme une partie intégrante de ce noyau ne se comportait, dans la plupart des cas, pas autrement que les régions protoplasmiques des antipodes, par exemple, ou bien se colorait moins fortement en rouge ; tout au plus pouvait-on y reconnaître des grumeaux colorés en violet bleuâtre ; mais on en voyait de semblables dans le protoplasme des antipodes. Bref cette région aréolaire du noyau secondaire offrait des caractères parfaitement identiques à ceux du protoplasme des cellules antipodes. Je me suis donc cru autorisé à voir dans ce que l'on a désigné sous le nom

de noyau secondaire, une cellule délimitée au sein du protoplasme général du sac, tout comme le sont les antipodes, les synergides et l'œuf, cellule qui possède un protoplasme peu granuleux et un noyau pourvu d'un gros nucléole; je lui ai donné le nom de *cellule secondaire*.

* * *

J'ai décrit le développement de ce tissu que l'on trouve à la base du nucelle et sur lequel Van Tieghem est revenu avec tant d'insistance à plusieurs reprises, il y a quelque vingt ans, en lui appliquant le nom d'*hypostase* (120, 121, 122, 123). Il y a lieu de déplorer le choix de ce terme, qui n'est pas de sa création et qui était parfaitement inutile, puisque les auteurs allemands en avait déjà choisi un qui, pour n'être pas d'une composition aussi savante, n'en dit ni plus ni moins à l'esprit. Je veux parler du mot « postament » qu'employaient déjà M. Westermaier en 1890 (129) et Adolf Osterwalder en 1898 (75) et qui est définitivement entré en usage dans la terminologie botanique allemande comme en témoigne le mémoire de A.-H. Huss (51). N'eût-il pas été plus simple de traduire « postament » par son équivalent français « piédestal » ou « socle », ou d'admettre purement et simplement le mot allemand avec sa consonnance française? Il serait temps, à mon humble avis, que, pour éviter la multiplication à l'infini des synonymes, les botanistes anatomistes et cytologistes s'entendissent pour appliquer, dans leur domaine, la loi de la priorité des termes qui aident les systématiciens à sortir de la synonymie embrouillée qui leur cause tant d'ennuis. Il est vrai que Van Tieghem semble n'avoir pas eu connaissance des publications de Westermaier et d'Osterwalder et que nous pourrions lui retourner le reproche que Souèges (102) adresse à Huss (p. 232).

Mlle Mathilde Goldfluss (27) a donné le nom de pseudo-chalaze chez les Composées, à un tissu qui semble répondre, en bien des points, à la définition de celui dont nous parlons. Mais pourquoi pseudo-chalaze, puisque la vraie chalaze n'est pas

absente ? T. Ferraris (24) donne à cet appareil le nom de *coussinet* et il en décrit longuement le développement chez le *Romulea*.

Selon Van Tieghem (123), les cellules de ce tissu, « sans épaissir beaucoup leurs membranes, les lignifient fortement; aussi prend-il, par les colorants de la lignine, une coloration intense ». J'ai essayé la plupart de ces colorants, fuschine, vert d'iode, etc., mais je n'ai guère obtenu de résultat probant; seul le chloro-iodure de zinc m'a donné la coloration jaune-brun caractéristique. Il n'est donc pas nettement sclérifié ; cependant il répond à tous les autres caractères : les parois sont très réfringentes au début ; elles jaunissent par la suite et deviennent indigestibles. D'ailleurs la sclérification n'est pas indispensable suivant l'avis de Souèges (101, p. 570) qui a reconnu chez les Clématites une hypostase non lignifiée. Huss (51) pense également qu'il suffit que les membranes soient imprégnées par des substances aldéhydiques ou autres pour les mettre à même de résister à l'activité digestive du sac embryonnaire (p. 149). Mais il ne peut admettre qu'il y ait jamais subérisation des parois cellulaires. Cela n'empêche qu'après lui Schweiger (91) déclare (pp. 522 et 530) que l'hypostase est un complexe cellulaire riche en matériaux nutritifs dont les cellules, qui doivent être considérées comme des cellules absorbantes, se subérisent dans l'ovule mûr et forment alors une clôture infranchissable.

Tous les auteurs qui ont reconnu l'existence de l'hypostase : Osterwalder, Huss, Van Tieghem, Souèges, sont d'accord pour lui attribuer cette faculté de résistance. C'est même pour mettre obstacle aux envahissements du sac embryonnaire et de l'albumen qu'elle existe, d'après Van Tieghem, et nous pouvons accepter cette affirmation ; car là où elle fait défaut, notamment chez les Gamopétales, on peut constater que le sac embryonnaire ou l'albumen déborde de ses limites normales sous forme d'haustoriums ou de suçoirs qui vont explorer les tissus sous-jacents dans la chalaze, le funicule, voire même le placenta, comme il résulte de nombreuses recherches (1, 2, 3, 4, 7, 8, 27, 34, 50, 54, 58, 59, 80, 90, 99).

Souèges (101, p. 570) se demande si l'hypostase n'est pas réfractaire aux échanges. « On peut répondre, dit-il, qu'une membrane légèrement lignifiée n'est pas une membrane dénuée de propriétés osmotiques ; l'hypostase est un tissu essentiellement vivant... Résistant lui-même à la digestion, il permet aux matériaux nutritifs d'arriver au contact des antipodes toujours dans des proportions à peu près égales. » On ne peut mieux dire et cette réponse est conforme aux constatations que j'ai faites chez le *Polygonum aviculare*. D'ailleurs la sclérification n'exclut pas la présence de ponctuations dans une membrane, et si nous n'en avons pas pu mettre en évidence, c'est probablement à cause de la minceur des parois et de la petitesse des cellules. Huss (51 p. 148) en signale çà et là ; il a, malgré l'affirmation contraire de Souèges (102, p. 232), bien compris le rôle de l'hypostase et ses rapports avec les antipodes ne lui ont pas échappé, puisqu'il dit, d'une part (p. 147), que ce tissu peut souvent, en même temps, jouer un rôle conducteur et, d'autre part (p. 149), qu'il est capable de s'opposer à l'activité dissolvante du sac embryonnaire. Mais pour jouer ce rôle conducteur, il n'est pas nécessaire que ces cellules soient allongées dans le sens de l'axe de l'ovule comme l'indiquent Westermaier (129) et Mlle Goldfluss (27). Osterwalder (75, p. 284) s'est élevé contre la manière de voir de Westermaier à ce sujet ; pour lui, ces cellules sont isodiamétriques ; cela résulte également des observations de Van Tieghem *(passim)*, de Souèges (101) et des miennes. Pour Huss, elles peuvent être allongées dans toutes les directions. Ces différences de formes correspondent, sans doute, à des cas particuliers.

Je suis donc parfaitement fondé à dire que l'hypostase établit une communication entre les tissus contigus au faisceau libéro-ligneux de la chalaze (lisière de cellules à contenu dense) et les antipodes, d'autant plus que la disposition en séries des cellules du centre de ce tissu leur facilite singulièrement cette mission.

Van Tieghem (122 et 123) déclare que l'hypostase « se retrouve dans le fruit mûr telle exactement qu'elle était dans le pistil »,

parce que « la même cause qui la fait indestructible la rend aussi incapable de toute croissance ultérieure ». Admettons encore le fait ainsi exprimé comme vrai dans certains cas particuliers ; mais j'affirme formellement avoir assisté au développement progressif de l'hypostase dans le *Polygonum aviculare*. D'ailleurs le sclérenchyme n'augmente-t-il pas de volume par la sclérification envahissante des parois des cellules situées de proche en proche ? Pourquoi refuser la même condition à l'hypostase ? Qu'une cellule d'hypostase une fois formée ne puisse plus se diviser, soit ; mais rien ne s'oppose à ce que des cellules voisines en prennent la nature si elles y sont déterminées.

Il est de fait, cependant, que l'hypostase ne prend qu'un accroissement limité et que vers la fin de la croissance de l'ovule fécondé, elle est suppléée dans son rôle isolateur, sur lequel nous aurons l'occasion de revenir, par les cellules chalaziennes qui s'étendent sur son pourtour et qui finissent par perdre leur contenu et, partant, ne peuvent plus jouer qu'un rôle passif. Ce phénomène se produit vers le moment où le funicule commence à se replier à la base. Un peu plus tard, lorsque la courbure en S du funicule devient manifeste, les cellules de l'hypostase meurent à leur tour, devenant inutiles dans leurs fonctions conductrices, puisque le système libéro-ligneux chalazien n'a plus de rapports avec le faisceau du funicule.

Il y a donc lieu de retenir qu'*on est généralement d'accord pour attribuer à l'hypostase la double fonction d'empêcher le passage des sucs digestifs et, à plus forte raison, des autres matériaux élaborés à l'intérieur du sac embryonnaire vers la chalaze et de permettre l'introduction, dans le sac, des matériaux nutritifs amenés par les conduits libéro-ligneux qui s'irradient dans la chalaze.*

*
* *

Au sujet de la fécondation, remarquons d'abord que tous les biologistes s'accordent à donner le nom d'*œuf*, dans le règne

animal aussi bien que dans le règne végétal, à la cellule sexuée femelle, avant même qu'elle ait été fécondée par le spermatozoïde ou son équivalent végétal. L'œuf ainsi considéré est souvent appelé aussi *oosphère* ou bien par les zoologistes *œuf mûr* (*) (O. Hertwig, 48). L'œuf que pond une poule peut ne pas être fécondé. Van Tieghem (118, p. 450) et ses adeptes n'appellent œuf que l'oosphère fécondée, « première cellule d'une plante nouvelle » ; c'est donc plutôt le premier état de l'embryon, l'embryon au stade unicellulaire ; c'est l'œuf fécondé, soit ; mais je crois que le terme œuf doit être conservé dans son acception adoptée par la généralité hormis Van Tieghem.

J'ai dit que l'acte de la fécondation semble prendre un temps relativement considérable pour s'accomplir (p. 29). J'ai pu me convaincre, par des expériences faciles à réaliser, que plus de sept jours s'écoulent depuis la pollinisation jusqu'à ce que l'œuf fécondé se cloisonne. Cela ne doit pas étonner outre mesure, puisqu'on a reconnu, selon Van Tieghem (118, p. 909), que pour beaucoup de plantes, sans partir de la pollinisation, mais de la fécondation de l'œuf, un délai de plusieurs semaines s'établit jusqu'à son premier cloisonnement ; dans les Chênes américains, cet intervalle atteint un an !

Que la formation de l'albumen soit en avance sur le développement de l'embryon, c'est un cas assez fréquent dont témoignent les recherches de D.-S. Johnson (53), Frye (25 et 26), Guignard (37), Treub (111), Burns (7), D'Hubert (18), Ed. Schmid (90) et Ferraris (24), entre autres. Ce tissu est à cloisonnement tardif et pour ainsi dire simultané en direction centripète, ce qui détermine la disposition rayonnante des cellules dans une coupe transversale d'un akène presque mûr. Il s'accuse dans l'ovule arrivé aux deux tiers de sa croissance. Son développement n'offre, au début, rien qui ne soit conforme aux faits signalés par Strasburger (106) et confirmés par

(*) Les zoologistes parlent même de l'œuf immature, avant l'expulsion des cellules polaires.

d'autres auteurs. Il se distingue par là de l'albumen du Sarrasin, étudié par Stevens (104), où une différenciation très nette ne tarde pas à se montrer en une région supérieure organisée en tissu et une région inférieure, comportant un tiers de la longueur du sac, et qui constitue un polyplaste (p. 61). Au cours du développement, la partie cellulaire s'étend vers la base du sac embryonnaire empiétant sur l'espace occupé par la portion polyplastique. « Cependant, même dans le fruit mûr, la région chalazienne présente toujours un espace contenant des restes de la portion basale non développée du sac embryonnaire (fig. 7) », c'est-à-dire, si je saisis bien, de la portion polyplastique.

Il est remarquable que, dans deux espèces aussi voisines, la graine arrive à la même constitution définitive par des voies si différentes! Dans notre espèce, en effet, tout le polyplaste albuminique se prend en tissu vers le moment où l'ovule atteint les deux tiers de sa croissance et où l'embryon, encore sphérique, a $0^{mm}08$ de diamètre, et il y a lieu même d'ajouter que la partie de l'albumen, voisine de la chalaze, à cause évidemment de l'étroitesse de l'espace dont elle dispose, constitue un corps cellulaire massif bien avant que la cavité de la partie médiane soit comblée. Mais ceci fait, les cellules ne tardent pas à former de l'amidon ; c'est vers le moment où l'embryon déploie ses cotylédons, mais où également, depuis quelque temps même déjà, les cellules de la partie chalazienne de l'albumen sont le siège de phénomènes particuliers : jamais ces cellules ne renferment des grains d'amidon; elles restent toujours claires; mais les cellules qui les suivent sont les premières à en former et cette formation se poursuit ainsi de loin en loin jusqu'à l'autre bout de l'albumen. Par la suite, les cellules restées claires, lorsque toutes les autres sont complètement remplies d'amidon et que la graine a presque cessé de croître, se vident, leurs cloisons se résorbent et elles laissent une cavité dans laquelle les cotylédons viennent loger la plus grande partie de leur masse. Ces phénomènes sont évidemment liés à ceux de la nutrition générale de l'ovule et de ses constituants. Nous avons vu (p. 59) que les cellules claires de l'albumen

servent d'entrepôt à des substances ternaires dissoutes. La liqueur de Fehling m'ayant donné constamment des résultats négatifs ainsi que l'iode, j'ai été amené à penser que ces substances devaient être non pas des glucoses ni des saccharoses, mais des polysaccharides autres que l'amidon. A quoi servent ces substances? Évidemment à fournir aux autres cellules de l'albumen les matériaux nécessaires à leur croissance et à la formation de l'amidon. Elles ne profitent pas directement à l'embryon. D'où proviennent-elles? C'est le moment de parler des antipodes.

*
* *

Évitant d'envisager la grande diversité qu'offrent les Angiospermes quant à la présence et au nombre des antipodes, je me bornerai à comparer mes observations avec celles qui présentent certaines analogies ou des faits de nature à étayer mes déductions quant à la fonction de ces organes.

Rappelons-nous que les trois antipodes du *Polygonum aviculare* se disposent à la suite les unes des autres et qu'au moment de la fécondation, la supérieure surtout commence à augmenter de volume ainsi que son noyau. Celui-ci se fragmente dès que se produisent les premières cloisons dans l'albumen. L'augmentation de volume et la fragmentation répétée des noyaux de cette antipode atteignent leur paroxysme au moment de l'apparition de l'amidon dans les cellules de l'albumen; elle a alors la forme d'une ampoule de 130 μ de diamètre et renferme une trentaine de noyaux.

Il existe assez bien d'exemples d'antipodes prenant un grand développement. Ils sont fournis par les recherches de Guignard chez le *Nicotiana* (38), chez les *Commelina*, *Narcissus*, *Iris*, *Eranthis*, *Clematis*, *Hepatica*, *Eriobotrya*, *Anoda* et plusieurs Composées (32 et 33); de D.-H. Campbell chez le *Lilaea subulata* H. B. K. (9), de Ferraris (24) chez le *Romulea*, de Strasburger (105) chez le *Myosurus*, de Westermaier (129) chez d'autres Renonculacées, parmi lesquelles notamment les *Nigella;* de J.-B. Overton (76) chez le *Thalictrum purpurascens*, de D.-S. Johnson (53) chez le *Heckeria*, de Merrel (69) chez le

Silphium, d'Osterwalder (75) chez l'*Aconitum Napellus*, de Souèges (101) chez diverses Renonculacées, de Huss (51) dans plusieurs Renonculacées, dans les *Epimedium*, *Glaucium*, *Papaver* et *Corydalis*, et d'autres auteurs renseignés par Coulter et Chamberlain (17), mais dont je n'ai pu me procurer les travaux. Dans les cas qui précèdent, toutes les antipodes prennent de fortes proportions. Mais parfois une seule antipode manifeste de l'activité; c'est la supérieure, comme dans l'objet de notre étude et selon Lloyd (63 et 64) dans plusieurs Rubiacées; mais ce peut être aussi l'inférieure qui fonctionne alors d'une autre manière, comme l'ont montré Chamberlain (17) pour l'*Aster Novae Angliae* [contredit toutefois par Mlle Goldfluss (27)], Miss Benson (3) pour les Amentacées et Servettaz (93) pour les *Eleagnus* et l'*Hippophae*.

Parfois aussi les antipodes deviennent nombreuses ou peuvent même former un tissu au fond du sac embryonnaire, comme il résulte des travaux de Campbell (10 et 11), de J.-E. Gow (28), de L.-W. Sharp (94), de Juel (56), de P. Guérin (30), de C.-O. Rosendahl (85). Devant ces constatations, on s'est demandé quelle signification il fallait assigner aux antipodes et l'on en est généralement revenu de l'opinion que ces organes ne jouent qu'un rôle accessoire. Cependant l'accord est loin d'être établi sur la manière dont l'intervention des antipodes dans les phénomènes de la nutrition du sac embryonnaire et de l'albumen peut être interprétée.

C'est Westermaier (129) qui a amorcé la question; après lui, Mlle Goldfluss (27) l'a reprise à propos des Composées; Ikeda (52) s'en occupe chez les Liliacées et Souèges (101) chez les Renonculacées; mais ce sont Lötscher (68) et Huss (51) qui embrassent le sujet avec le plus d'ampleur. Celui-ci, après avoir fait un résumé historique complet des connaissances acquises à ce point de vue et exposé ses recherches dans les familles des Renonculacées, Berbéridacées et Papavéracées, discute les hypothèses émises par ses prédécesseurs. Il en arrive à la conclusion simpliste et presque négative que les antipodes ne servent que de relai aux substances passant de la chalaze

dans le sac embryonnaire et qu'elles s'approprient une partie de ces substances pour leur propre accroissement. Il n'y a aucun argument, dit-il pour terminer, qui permette de leur attribuer une fonction de résorption, d'élaboration, d'absorption ou de sécrétion en faveur du contenu du sac embryonnaire.

Il m'est difficile d'accepter cette manière de voir et j'incline plutôt à penser que, dans des cas comme celui que j'ai traité, les antipodes sont des organes sécréteurs destinés à transformer les matériaux nutritifs, amenés par les tissus conducteurs de la chalaze, en substances utilisables par le sac embryonnaire d'abord et par l'albumen plus tard. Ce sont les diastases qu'elles sécrètent qui maintiennent à l'état de dissolution le contenu des trois assises d'albumen qui leur font suite. L'argumentation soutenue par Souèges (101) au sujet des antipodes des Clématites (p. 513) me paraît parfaitement fondée et applicable à notre espèce.

D'après Souèges, la formation de vacuoles accuse des signes de dégénérescence; celle-ci débuterait assez tôt dans notre objet, avant même que la cavité de l'albumen soit comblée; et c'est cependant à partir de ce moment que l'activité de notre antipode se manifeste le plus. Je ne crois pas que, dans ce cas, la formation d'une vacuole soit un signe de dégénérescence, pas plus que la fragmentation des noyaux. L'antipode ne commence à dégénérer que lorsqu'elle a pour ainsi dire mis en train la formation de l'amidon et de la couche protéique de l'albumen. Dès lors son activité se ralentit et ne cesse que lorsque la graine a fini sa croissance. Chez le *Polygonum aviculare*, l'antipode n'est pas englobée par l'albumen pendant ce processus de dégénérescence, comme c'est le cas dans la Clématite; mais elle est repoussée contre la chalaze et elle détermine la formation, sous l'albumen, d'un espace qui en contient les restes et, en définitive, la graine présente la même constitution, à part l'embryon, que celle que Stevens (104) décrit pour celle du Sarrasin. Mais Stevens ne fait aucune mention des antipodes. Il n'attache aucune attention à leur développement. Il se pourrait, dès lors, que ce qu'il

a pris pour la région inférieure polyplastique de l'albumen ne soit en réalité que l'antipode supérieure fortement développée. Pourtant l'ouvrage de Coulter et Chamberlain (17) signale aussi des exemples d'albumens débutant dans leur évolution par la formation de deux chambres dont la supérieure devient un tissu, tandis que l'inférieure reste uni- ou plurinucléée, tout en prenant un certain accroissement, exemples tirés des recherches de Hall (41), de Murbeck (73), de Holferty (49) et surtout de Schaffner (88), dont un dessin (fig. 79[b]) évoque puissamment un des stades de la formation de l'albumen dans notre Renouée. Il en est de même, et à un plus haut degré encore peut-être, de celles qui accompagnent la note de W.-C. Coker (16). Au surplus, Coulter et Chamberlain renseignent un assez grand nombre d'autres familles présentant des cas analogues à ceux qu'ont observés ces derniers auteurs et il semble que dans la majorité d'entre eux la chambre inférieure de l'albumen remplit le rôle que nous avons assigné aux antipodes (*). C'est notamment le cas pour les haustoriums contenant des noyaux libres d'origine albuminique signalés par M^me^ Balicka-Iwanowska (1), par Billings (4) et par Peltrisot (80). D'ailleurs, il n'est pas nécessaire que cette partie inférieure de l'albumen reste à l'état polyplastique pour jouer ce rôle. Nous en avons une nouvelle preuve dans le mémoire récent de P. Lavialle (59). Mais encore, dans le cas du *Sonchus* décrit par cet auteur, ce tissu primitif finit-il par passer à l'état de polyplaste par suite de la gélification et de la disparition des membranes cellulaires.

Tous ces résultats des observations qui précèdent tendent à faire admettre que, *dans l'ovule fécondé, se développe un organe d'origine antipodiale ou albùminique voué à une fonction digestive ou sécrétrice en faveur du contenu du sac embryonnaire ou de l'albumen.*

(*) Faisons remarquer ici que Guignard (36) a trouvé que dans certaines Labiées, c'est la partie supérieure qui devient polyplastique et la partie inférieure qui se prend en tissu.

Nous avons vu que les premières cloisons se manifestent dans l'albumen quand l'embryon, mesurant près de 0^{mm}08, avait déjà pris un certain développement ; l'assise cellulaire qui en résulte se recloisonne tangentiellement pour former, en direction centripète, le tissu albuminique ; puis, elle constitue finalement une couche de deux ou trois assises de cellules à contenu protéique et ce au moment où l'amidon apparaît dans les cellules sous-jacentes et où l'antipode commence à dégénérer. On peut admettre, avec Souèges (101), que cette couche se différencie en couche digestive et que ses cellules héritent de la fonction de l'antipode, *telle que nous avons envisagé cette fonction jusqu'ici.* J'ajoute ces derniers mots en les soulignant, parce que Souèges termine son long exposé sur les antipodes en disant, sans y avoir fait allusion auparavant, que ces cellules fournissent au sac embryonnaire les substances diastasiques dont il a besoin pour digérer le nucelle ; cela équivaut à dire que les cellules de la couche digestive continuent à digérer le nucelle. Mais il n'en reste presque plus rien quand cette couche se différencie. Et puis, le nucelle ne commence-t-il pas à se résorber bien avant que les antipodes soient constituées ? Évidemment, cette hypothèse de la digestion du nucelle par le sac aidé des antipodes est très séduisante, d'autant plus qu'elle est défendue avec beaucoup de talent par Souèges, et je comprends qu'elle s'accrédite auprès d'autres chercheurs, tels que Lavialle (59) qui pense que la résorption définitive du parenchyme tégumentaire (du *Sonchus*, où le nucelle disparaît entièrement de bonne heure) est due à une propriété digestive de l'assise externe de l'albumen qui sécréterait les diastases nécessaires pour compléter la digestion.

Il convient donc, semble-t-il, d'admettre que l'assise externe de l'albumen, *assise protéique* de Guignard ou *couche à aleurone* de Haberlandt, n'exerce sa fonction digestive que vis-à-vis de l'albumen seulement, comme les expériences de Haberlandt (40) l'ont montré et comme l'admet également Guignard (36). J. Grüss (29) se base sur quelques cas parti-

culiers pour refuser à la couche à aleurone des Dicotylées les mêmes propriétés qu'à celle des Monocotylées et spécialement des Graminées. C'est d'autant plus à tort qu'il a négligé d'observer des Dicotylées ayant un albumen farineux.

Certes, l'objection tirée de ce que le nucelle commence à se résorber, bien avant que les antipodes soient constituées, peut tourner en faveur de l'hypothèse rappelée plus haut, en ce sens que le nucelle ne commence à se résorber que lorsque la cellule mère du sac a fini par supplanter ses sœurs, qu'on ne peut concevoir qu'il ne se résorbe qu'en faveur de cette cellule mère, que celle-ci, ancêtre des antipodes, contient ces dernières et leurs propriétés en puissance, qu'elle est donc capable de digérer le nucelle en sécrétant elle-même des diastases. Ceci est un peu hasardé, mais admettons-le. Ces diastases auraient pu agir directement sur les cellules sœurs qui n'étaient limitées que par des cloisons facilement gélifiables, mais non sur les cloisons cellulosiques des cellules du *Tf. N.* voisines. Il semble bien, en effet, que la disposition en éventail ou en jet d'eau de ces cellules soit en relation avec le sens des courants osmotiques qui les traversent et que ces courants se produisent dans un sens longitudinal. Ils doivent donc se diriger vers la base du nucelle, vers la régiou chalazienne. Mais avant que, dans la cellule mère, s'instituent les phénomènes avant-coureurs de la division du noyau, nous avons vu s'établir le groupe de cellules dont l'hypostase tire son origine. Il est légitime d'admettre que ces cellules présentent également déjà, en puissance, les caractères propres à l'appareil dont elles préparent la naissance. Elles doivent donc faire obstacle au courant osmotique du nucelle et celui-ci sera dévié vers la commissure tégumentaire où il rencontrera les cellules de la base de l'*Ep. N.* dans lequel il s'engagera.

Mon hypothèse se justifie encore davantage dans la suite du développement. A mesure que le sac embryonnaire et, après lui, l'albumen et l'embryon se différencient, le nucelle se résorbe de haut en bas, cellule par cellule. Les produits de cette résorption se dirigent vers le bas de l'*Ep. N.*, ainsi qu'il résulte mani-

festement des figures 31 et 40. Ils n'entrent pas directement dans le sac embryonnaire ni dans les cellules de la couche digestive de l'albumen. Ceux-ci reçoivent en quantité suffisante les matériaux dont ils ont besoin de la chalaze par l'intermédiaire des antipodes. Si j'admets que la couche protéique ou digestive de l'albumen hérite de la fonction de l'antipode, c'est que je considère que cette fonction consiste surtout à sécréter les diastases nécessaires pour digérer l'albumen sur le passage de l'embryon. Plusieurs circonstances tendent à justifier cette manière de voir : Nous avons vu que les diastases sécrétées par l'antipode et par l'assise de cellules d'albumen qui la touche entretiennent à l'état de dissolution le contenu des trois assises de cellules de l'albumen qui sont à la base de ce dernier. Les cellules de l'assise protéique agissent plus tard de même à l'égard des cellules d'albumen amylifères sous-jacentes, dans la région que doit occuper l'embryon, tout le long d'une des arêtes de la graine. De ce côté, en effet, l'assise protéique est plus épaisse ; elle comporte quatre ou cinq assises de cellules ; celles-ci sont le siège d'une grande activité amenant la dissolution du contenu des cellules amylifères sous-jacentes au fur et à mesure que l'embryon s'en approche. Partout ailleurs l'assise protéique est simple, parfois double, latente dans son action digestive qui semble ne devoir se manifester que lors du phénomène de la germination.

Il résulte de ce qui précède que le développement de l'embryon le long d'une des arêtes de la graine et la courbure des cotylédons à la base de l'albumen sont déterminés par l'action digestive, sur l'albumen, des cellules de la couche protéique et de l'antipode. Celles-ci creusent, en somme, dans l'albumen par ailleurs solide, un lit dans lequel l'embryon peut s'étendre sans rencontrer d'obstacle.

On peut donc dire avec E. Hannig (42) que la courbure des cotylédons a lieu par des causes purement mécaniques, par suite des obstacles qu'ils rencontrent de la part de l'albumen solide, d'un côté, et de la couche périphérique de l'albumen, de l'autre. Il y a, en effet, une très grande analogie entre le déve-

loppement, dans la graine, des embryons du *Polygonum aviculare* et des Crucifères étudiées par Hannig. Mais cet auteur a tout à fait méconnu le rôle de l'assise protéique que Guignard (35 et 36) a mis en lumière chez les Crucifères aussi. Ce n'est, suivant Hannig, que l'embryon qui se fraie une voie dans l'albumen dont certaines régions, variables pour les espèces, sont plus facilement attaquées par les enzymes produites par l'embryon. On peut admettre que celles-ci interviennent sur le tard; mais je ne trouve, dans le travail de Hannig, aucune raison qui rende mes déductions inapplicables à ses Crucifères.

Bref, l'antipode et l'assise protéique de l'albumen n'exercent leur fonction digestive que sur les cellules de l'albumen et n'ont aucune action sur celles du *Tf. N.*

Celles-ci se résorbent de haut en bas, cellule par cellule, avons-nous dit; les produits de leur résorption se dirigent vers le bas. Ce processus est en tous points comparable à celui que l'on constate dans les phénomènes que l'on a parfois appelés *autophagie* et qui se passent dans les plantes ou portions de plantes vivant dans un milieu dépourvu de principes nutritifs : Les organes les plus vieux se résorbent au profit des parties nouvelles et cette résorption, dans ces organes, progresse du sommet vers la base, des régions distales vers les régions proximales. C'est ce dont on peut s'assurer facilement dans des cultures de Maïs ou de Pois dans l'eau distillée. [Voir aussi Pfeffer (82, tome I *passim*).]

*
* *

Examinons maintenant l'*Ep. N.*, dont l'aspect et le rôle physiologique méritent de retenir notre attention.

J'ai fait mention, pour la première fois, de l'*Ep. N.* à propos de la différenciation de la cellule mère primordiale du sac embryonnaire (p. 23). C'était peut-être un peu prématuré; car alors nous ne sommes en présence que d'un mamelon ovulaire non encore différencié en nucelle et en téguments, ceux-ci ne faisant leur apparition qu'un peu plus tard. Sommes-

nous, dès lors, autorisés à appeler *Ep. N.* l'assise externe de cellules qui recouvre ce mamelon? Il faut passer condamnation ; car cette assise ne tarde pas d'avoir droit à cette désignation d'*Ep. N.* Comme nous l'avons dit à la page 25, elle se caractérise d'ailleurs de bonne heure, vers le moment où le canal micropylaire se ferme pour ainsi dire et ce, en présentant des cellules à contenu dense, à noyaux sphériques, volumineux et qui, au moment de l'anthèse, sont plus grandes que toutes celles des téguments (p. 27 et fig. 11). L'*Ep. N.* reste simple au sommet; il est tout à fait exceptionnel d'y voir une cellule recloisonnée tangentiellement. Le tube pollinique, pour pénétrer dans le sac embryonnaire, se fraie un passage entre les deux cellules qui se trouvent en face du micropyle. Plus tard, il ne reste plus guère de trace de cette pénétration. Mais aussitôt après celle-ci, on remarque que le contenu des cellules de l'*Ep. N.* devient plus granuleux et plus dense encore qu'auparavant (p. 31). Cette assise est la seule du nucelle qui persiste dans la moitié supérieure de ce dernier. Il convient de noter que, dès ce stade, le *Tf. N.* est isolé de la chalaze par l'hypostase agrandie et qu'il n'a plus de rapport possible qu'avec l'*Ep. N.* qui, lui, reste en contact avec la chalaze pendant un certain temps encore. — L'embryon, qui se forme plus tard, se différencie en un embryon proprement dit et en un suspenseur dont la cellule supérieure s'insinue en crampon entre les cellules du sommet de l'*Ep. N.* (pp. 32 et 33, fig. 29). C'est à partir de ce moment que l'aspect et le rôle de cette assise deviennent surtout caractéristiques : sauf dans la région voisine du sommet, les cellules deviennent larges et grandes ; leur protoplasme est très dense et finement granuleux ; leurs noyaux s'allongent en forme de boudin dans le sens longitudinal et ils se fragmentent ; leurs parois transversales deviennent très minces ; il en est de même des parois internes, chez les cellules de l'*Ep. N.* approchant de la base ; celles-ci, généralement plus grandes, restent manifestement en continuité osmotique avec les cellules du *Tf. N.* contiguës, comme le montrent très bien, entre autres, les figures 31 et 40, et elles ne le sont qu'avec

celles-là, car, partout ailleurs, elles sont en contact, soit avec des cellules physiologiquement inactives, soit avec des cellules de l'*Ep. i. S.* dont elles sont séparées par une paroi cutinisée. Quant aux deux ou trois étages de cellules de l'*Ep. N.* voisines des antipodes, elles se vident de plus en plus et finissent par former, avec les cellules de l'hypostase vides elles-mêmes, une clôture qui intercepte toute communication de l'*Ep. N.* avec le dehors (p. 35), puisque, plus haut, les cellules de cette assise ont la paroi externe cutinisée. Ces caractères vont en s'accentuant par la suite. A un stade plus avancé, les cellules de l'*Ep. N.* présentent même une striation très nette du protoplasme dans le sens longitudinal, indice de la direction générale des courants établis dans leur contenu cellulaire. Sous cet aspect, le protoplasme des cellules de l'*Ep. N.* prend une forme qui rappelle singulièrement les notions d'ergastoplasme ou de kinoplasme données par quelques auteurs [cf. Souèges (100) qui donne la bibliographie du sujet].

Nous avons donc pu tirer de ces faits les conclusions suivantes (v. p. 36) :

1° *L'Ep. N. et le Tf. N. ne sont en rapport osmotique qu'entre eux, à l'exclusion de tout autre tissu* (cf. notamment p. 36 et fig. 31).

2° *L'embryon est en rapport osmotique avec l'Ep. N. par l'intermédiaire du suspenseur ; aucun échange osmotique ne paraît possible entre l'albumen et l'embryon, du moins tant que celui-ci n'a pas constitué complètement ses cotylédons.*

Toutes ces constatations nous forcent d'admettre que, dès le début de la résorption du *Tf. N.*, les produits de cette résorption se rendent dans les cellules de la base de l'*Ep. N.* Celui-ci se charge de les conduire vers le sommet, où ils sont transmis à l'appareil synergique d'abord et plus tard à l'embryon. Avant le développement de ses cotylédons, celui-ci ne tire et ne peut tirer toute sa subsistance que du *Tf. N.* par l'intermédiaire de l'*Ep. N.* Ce dernier joue ce rôle activement jusqu'au moment

même de la maturité de la graine; car après que les derniers restes du *Tf. N.* sont résorbés, lui-même vide ses cellules au profit de l'embryon. C'est lorsque les cellules de l'*Ep. N.* sont entièrement évacuées que l'accroissement de l'embryon s'arrête et que la graine passe à l'état de vie latente.

Dans le cas qui nous occupe, il n'est donc pas exact de dire que l'albumen digère les parties du nucelle qui l'entourent, pas plus qu'on ne peut affirmer que, dans les premiers stades tout au moins de son développement, l'embryon digère l'albumen. Celui-ci s'édifie par les substances que lui amènent et préparent les antipodes et tant qu'il n'est pas arrivé à sa conformation définitive, l'embryon n'en tire aucun profit. En attendant, celui-ci se nourrit des produits de la digestion du *Tf. N.*, digestion qui s'opère à l'intervention de l'*Ep. N.* qui affecte d'ailleurs tous les caractères d'une assise digestive. De l'*Ep. N.*, ces produits sont amenés dans l'embryon par le suspenseur. Le rôle de ce dernier n'est donc pas simplement d'enfoncer l'embryon dans l'albumen; mais c'est surtout un organe d'absorption et de conduction en faveur de l'embryon.

Il n'y a guère d'exemple jusqu'ici, dans les autres familles de plantes, d'un *Ep. N.* jouant un rôle aussi actif et aussi important que celui du *Polygonum aviculare* et probablement de toutes les Polygonées. Stevens (104), en effet, a également été frappé, en étudiant le Sarrasin (*Fagopyrum esculentum*), de l'allure spéciale de l'*Ep. N.* dont il décrit le développement et les particularités qui concordent parfaitement avec ce que j'ai constaté. Il lui attribue une fonction nutritive et l'assimile à ce que Coulter et Chamberlain (17, p. 103) appellent « nutritive jacket »; mais il n'insiste pas davantage sur le point de savoir au profit de quelle partie de l'ovule l'*Ep. N.* fonctionne.

Cependant Billings (4) signale la remarquable régularité et la persistance de l'*Ep. N.* dans l'ovule de l'*Armeria plantaginea*. D'après cet auteur, l'assise en question ressemble à un « tapetum », mais elle n'en a pas la valeur physiologique parce qu'elle n'exerce, semble-t-il, aucune fonction digestive ou

absorbante. Dans les autres Plombaginées qu'il a examinées, à savoir : *Armeria vulgaris*, *Goniolinum elatum* et *Statice latifolia*, il a retrouvé les mêmes caractères ; de sorte qu'il est permis de supposer que ces derniers sont assez généraux dans cette famille de Plantes. Il y aurait toutefois lieu de vérifier si Billings a suffisamment défini le rôle de l'*Ep. N.* Car si, comme il le dit, « l'embryon, dans le cours de son développement, ne trouve guère sa subsistance que dans le nucelle », je suis porté à penser que la persistance et l'aspect de l'*Ep. N.* trouvent leur explication dans l'accomplissement d'une fonction digestive et conductrice comme il en est dans notre espèce. Dans les *Erodium* et les *Pelargonium*, le même auteur a également trouvé un *Ep. N.* jouant un rôle actif ; il y a là, en effet, outre un « tapetum » normal formé par l'*Ep. i. S.*, un « tapetum » accessoire tapissant intérieurement le premier et formé par l'*Ep. N.* Ce dernier se résorbe de bas en haut, le sommet persistant jusqu'à la maturité, et contribue certainement au transport des matières nutritives nécessaires au suspenseur et à l'embryon. C'est aussi le cas chez certaines Crassulacées, comme il résulte du mémoire de M^lle^ C. Rombach (83). Dans un travail assez récent, M. Mücke (71) attire également l'attention sur la persistance de l'*Ep. N.*, auquel il attribue un rôle important sous le nom de couche périspermique.

L'expression « *tapetum* » *normal* employée ci-dessus se justifie par le fait que la plupart des auteurs s'accordent à dire que, d'ordinaire, le « tapetum » ou « nutritive jacket » ou « columnar tissue » de Shreve (96), ou « couche de revêtement », selon l'expression de Warming (126), ou « assise digestive », comme l'appellent Souèges (99) et Lavialle (59), dérive d'une assise du tégument et de préférence de l'assise la plus interne, *Ep. i. T.* ou *Ep. i. S.* selon le cas. Mais le fait que Billings et Stevens ont, comme moi, reconnu que cette fonction peut être accomplie par l'*Ep. N.* prouve une fois de plus qu'il faut se garder de donner à des formations morphologiques une définition physiologique. C'est d'ailleurs ce qui découle de l'exposé fait par Coulter et Chamberlain (17, p. 103) en trai-

tant ce point. Notons que ces auteurs considèrent comme assise digestive la couche de cellules entourant incomplètement le sac embryonnaire de l'*Helosis guyanensis* qui a été étudié par Chodat et Bernard (15), alors que ces derniers ne se sont eux-mêmes pas prononcés sur ce point. Mais de ce que les savants suisses ne rejettent pas l'idée de considérer ces cellules comme représentant le nucelle dont elles seraient une assise unique, soit l'*Ep. N.*, ce serait un exemple de plus d'*Ep. N.* remplissant la fonction d'assise digestive. On pourrait y ajouter celui des Droséracées; cependant Fr. X. Lang (58) a montré qu'après la fécondation, l'*Ep. N.*, jusqu'alors remarquablement caractérisé, ne tarde pas à être résorbé chez les *Drosera*.

Au surplus, aucun des auteurs qui se sont occupés de l'assise digestive, Guignard (36), Mme Balicka-Iwanowska (1), Hegelmaier (47), Billings (4), H. Marshall Ward (124), Schwere (92), Lavialle (59) ni même Mlle Goldfluss (27), n'indique clairement dans quel sens s'opère le transport des matériaux digérés par cette assise. Ce dernier auteur dit bien que les « cellules épithéliales » (autre nom encore donné aux cellules de l'assise digestive) ont pour fonction de digérer les couches internes de l'ovule au profit du sac embryonnaire et de son contenu, et plus loin, que c'est par l'intermédiaire des antipodes que les substances digestibles élaborées par l'ovule entrent dans le sac embryonnaire; mais n'y a-t-il pas lieu de considérer cette manière de présenter les choses comme trop générale et, dans les cas étudiés par ces auteurs, n'y aurait-il pas aussi une partie de ces substances qui emprunterait la voie de l'assise digestive pour se rendre vers l'embryon naissant? Les dessins qui accompagnent le mémoire de Mlle Goldfluss, tout schématiques ou incomplets vers le haut qu'ils sont, me font pencher pour l'affirmative. On semble trop facilement admettre qu'en principe, les apports de substances ne parviennent dans le sac embryonnaire que par la région antipodiale. Cependant, révélée par les recherches de Balicka-Iwanowska, de Billings, de Burns (7), de Lang, etc., l'existence de suçoirs micropylaires en même temps que de suçoirs

chalaziens dans les ovules fécondés de certaines familles de Plantes (Campanulacées, Lobéliacées, Stylidacées, Lentibulariées, etc.) doit suffire pour indiquer que l'extrémité micropylaire ou, si l'on veut, synergique de l'ovule est aussi une voie de pénétration souvent employée par les substances nutritives destinées au sac embryonnaire ou à son contenu, l'embryon notamment, comme nous allons le voir.

*
* *

Bien que n'ayant pas en vue d'étudier d'une façon spéciale l'embryogénie du *Polygonum aviculare*, j'ai été amené à suivre le développement de l'embryon à l'effet de déterminer ses rapports avec les parties voisines de l'ovule. Ce développement se fait suivant un mode qui, dans ses traits généraux, se rapproche beaucoup de celui que Souèges (101) assigne à l'embryon de *Myosurus minimus* L. Mes figures 29, 34 et 37 offrent les plus grandes analogies avec les figures 178, 202 et 207 du mémoire de Souèges. Le tissu de pénétration ou hypophysaire y est peut-être moins important au début et les initiales des trois histogènes y sont mieux marquées d'une façon plus précoce, ce qui tend à rapprocher mes observations de celles de Hanstein (43). Mais tandis que ce dernier indique constamment une initiale simple pour le périblème dans toutes les espèces qu'il a observées et dessinées, nous distinguons dans notre espèce (cf. fig. 37) deux assises d'initiales pour le même tissu, ce qui est aussi le cas dans le *Myosurus*.

Remarquons seulement que tout au début, la division des cellules de l'embryon proprement dit se fait dans un autre sens que chez le *Myosurus;* la cellule apicale se divise d'abord par une cloison longitudinale, puis les deux cellules ainsi formées par une cloison transversale et non de nouveau longitudinale. Ce n'est que bientôt après que les quatre cellules de l'embryon se divisent par une cloison longitudinale située dans un plan perpendiculaire à la première cloison longitudinale. Des huit cellules qui en résultent, les quatre apicales se divisent trans-

versalement en deux chacune, tandis que les quatre inférieures se diviseront plus tard. La même succession dans les divisions des cellules de l'embryon a été décrite chez l'*Habenaria* par W.-H. Brown (6).

Dans le *Myosurus,* au contraire, il semble que les quatre cellules-quadrants se divisent ultérieurement d'une façon plus suivie et sans qu'il y ait de différence de temps entre les deux hémisphères. De plus, les cellules du suspenseur y entrent en division en même temps que celles de l'embryon, alors que chez le *Polygonum aviculare,* elles ne le font que lorsque l'embryon comprend douze cellules, donc beaucoup plus tard.

D'après un travail récent de Souèges (103), les premiers débuts du développement de l'embryon de *Polygonum Persicaria* sont foncièrement différents de ceux de notre espèce. En effet, notre confrère français voit dans les deux éléments supérieurs juxtaposés de la tétrade proembryonnaire l'origine, non pas de l'embryon proprement dit en entier, mais seulement des cotylédons et de la moitié supérieure de l'axe hypocotylé. C'est celle des deux cellules du suspenseur que j'appelle, à la page 32, l'inférieure, correspondant à la cellule intermédiaire (*m*) de Souèges qui fournira la moitié inférieure de l'axe hypocotylé; l'hypophyse prend naissance aux dépens de ma cellule supérieure du suspenseur, l'inférieure (*ci*) pour Souèges. En outre, dans l'espèce étudiée par ce dernier, les deux cellules supérieures juxtaposées se cloisonnent de nouveau verticalement ou longitudinalement, au lieu de prendre des cloisons transversales comme dans le *Polygonum aviculare.* Il y aurait donc lieu d'attribuer une origine essentiellement différente aux mêmes tissus des embryons de ces deux espèces si voisines. Je me borne à constater cette contradiction, ne voulant pas, pour le moment du moins, approfondir ce point d'embryologie comparée, d'autant plus qu'à bien d'autres points de vue encore, le genre *Polygonum* montre une variabilité de caractères qui doit nous interdire des généralisations prématurées.

* * *

Au sujet du suspenseur, certaines particularités méritent d'être mises en relief. Nous avons donné à la page 32 des détails sur sa formation et nous avons vu qu'au moment où l'embryon, sphérique encore, a 0^{mm}08 de diamètre (fig. 29), il comporte quatre cellules : deux discoïdes sous l'embryon, une troisième plus vaste à grande vacuole et une quatrième cellule-crampon qui enfonce entre les cellules de l'*Ep. N.* des prolongements diverticulés. Ces deux dernières semblent ne plus devoir se diviser. Cette faculté n'est laissée qu'aux deux cellules discoïdes aux dépens du travail desquelles le suspenseur prendra son allongement ultérieur. Il y a lieu de remarquer que les cellules du suspenseur ne se divisent jamais longitudinalement, bien qu'elles acquièrent une grande largeur. Ce suspenseur, qui, contrairement à ce qui se passe dans le *Polygonum Persicaria*, où il est rudimentaire d'après Souèges, finit par compter une dizaine de cellules, n'abandonne ses fonctions que lorsque l'embryon est à peu près complètement développé.

Je crois que ces fonctions ne consistent pas tant à pousser l'embryon au sein de l'albumen que d'assurer une voie d'accès, normale après tout, aux substances nutritives nécessaires à l'embryon pendant son développement. La constitution et le rôle de l'*Ep. N.* tels qu'ils ont été décrits plus haut, le mode d'attache du suspenseur à l'*Ep. N.*, la densité du protoplasme contenu dans les cellules du suspenseur, la démarcation très nette entre les tissus de l'albumen et l'embryon jusqu'au moment où les cotylédons apparaissent, toutes ces circonstances contribuent à nous éclairer sur le rôle du suspenseur. La cellule que nous avons appelée crampon est aussi un véritable suçoir présentant une grande surface de contact avec les cellules de l'*Ep. N.* dont elle reçoit plus facilement les matériaux nutritifs. Ceux-ci sont transmis à la grande cellule vacuoleuse qui suit le crampon et dans laquelle ils subissent probablement des transformations avant d'être envoyés à l'embryon. Ce n'est que lorsque les cotylédons ont déjà acquis un notable développement qu'on peut admettre qu'à cette nutrition par le suspenseur s'ajoute une nutrition cotylédonnaire aux dépens des

substances de l'albumen, digérées par l'assise protéique et absorbées par l'épiderme des cotylédons, ainsi qu'il semble résulter des expériences instituées par Van Tieghem (116, 117 et 118, p. 953).

L'idée que le suspenseur sert au transport des matières nutritives vers l'embryon n'est pas neuve. Elle devait s'imposer à ceux qui voulaient établir des analogies physiologiques entre le règne animal et le règne végétal. On peut considérer, en effet, le suspenseur comme une espèce de cordon ombilical. Dans son travail paru en 1879, M. Treub (109) fait l'historique de la question et rappelle que c'est L.-C. Treviranus (112) qui l'a posée le premier, mais pour la résoudre négativement. Endlicher et Unger (21) estiment aussi que « probablement le suspenseur amène de la nourriture à la cellule embryonnaire pendant une période de son développement ». Meyen (70), avant eux, n'avait admis cette fonction que « là où le suspenseur prend un développement extraordinaire, comme dans les genres *Capsella*, *Alsine*, etc. ». Cette fonction était surtout attribuée aux suspenseurs qui, comme dans les *Tropaeolum* et dans quelques Orchidées, se développent au dehors de l'ovule, ainsi que le montrent les recherches de H. Schacht (86 et 87), d'A. Dickson (19), de F. Hegelmaier (46). A la page 5 de son mémoire, Treub lui-même pose en principe qu'il peut y avoir « une différenciation, en deux parties distinctes, de l'ensemble des cellules dérivant de la « vésicule embryonnaire », de manière qu'une des parties ait le rôle spécial d'absorber les matières plastiques, tandis que l'autre ne ferait qu'entasser dans ses cellules ces matières qui lui sont amenées » ; et il prouve plus loin que ces cas existent réellement dans beaucoup d'Orchidées. Quelques années plus tard, le même auteur revient encore avec insistance sur cette manière de voir (110). Les observations de Treub concernant le développement du suspenseur à l'extérieur du sac embryonnaire confirment celles de Schacht, de même que celles de Ch. Muller sur l'*Orchis Morio* (72), bien que ce dernier auteur donne une interprétation tout à fait erronnée sur ce dévelop-

pement. Depuis lors, H.-M. Ward (125), W.-H. Brown (6), R.-G. Leavitt (60) et L.-W. Sharp (95) ont obtenu des résultats semblables dans leurs recherches sur diverses espèces d'Orchidées. Ici la fonction nutritive du suspenseur est réalisée à la faveur de la faculté qu'a cet organe de se développer au dehors du sac embryonnaire, du côté du micropyle, en une sorte de suçoir simple ou plus ou moins ramifié qui va explorer les tissus avoisinants et parfois même le placenta. Ailleurs, comme chez beaucoup de Légumineuses, le suspenseur devient très épais, parfois même tuberculeux, comme Guignard (31) l'a montré chez le *Citysus Laburnum;* dans ces cas où le développement de l'embryon proprement dit subit d'ailleurs souvent un long retard, le rôle d'appareil nutritif rempli par le suspenseur consiste surtout pour celui-ci à être un organe de dépôt.

Quelque chose d'analogue existe chez les *Erythronium*, comme l'a montré J.-H. Schaffner (89), chez le *Tulipa Gesneriana L.* d'après A. Ernst (22), chez les Rubiacées étudiées par F.-E. Lloyd (63, 64) qui fait remarquer que dans le *Vaillantia hispida* les grandes cellules du suspenseur confinant à l'embryon sont groupées comme une grappe de raisin, tandis que plus bas (contre le micropyle), une simple cellule allongée forme le point d'attache. Cette dernière cellule semble constituer, en effet, un crampon-suçoir comme celui que nous avons décrit. Johannes Nitzschke (74), dans le *Limnocharis emarginata;* A. Famitzin (23), dans l'*Alisma Plantago;* K.-M. Wiegand (130), dans le *Potamogeton foliosus* Raf.; R.-B. Wylie (131), dans l'*Elodea canadensis;* O. Rosenberg (84), dans le *Zostera marina;* J.-H. Schaffner (88), dans le *Sagittaria variabilis*, et G.-M. Holferty (94), dans le *Potamogeton natans,* ont signalé l'existence d'un court suspenseur dont la cellule basilaire volumineuse, persistant pendant la plus grande partie du développement de l'embryon, doit également jouer un rôle évident dans la nutrition de ce dernier. De son côté, M^lle^ Goldfluss (72) a figuré un suspenseur constitué de même chez le *Catananche lutea.* L.-R. Tulasne (113) et Rosa Perotti (81) signalent le même fait chez les Caryophyllées, où le suspenseur est toutefois plus

allongé. Néanmoins, aucun de ces auteurs n'a établi les rapports qui peuvent exister entre la cellule basilaire du suspenseur et l'*Ep. N.* ou l'assise qui le remplace éventuellement. Il est vrai que le rôle de celui-ci n'a guère attiré l'attention jusqu'à présent.

Il semble bien que, dans beaucoup d'autres cas encore, les cellules du suspenseur et en particulier sa cellule basilaire aient à jouer la fonction importante d'organe d'absorption en faveur de l'embryon. N'en serait-il pas ainsi notamment dans les figures publiées par F.-H. Billings (4) au sujet du *Lobelia excelsa* (fig. 84 et 85), des *Scaevola* (fig. 93, 94 et 95), qui sont surtout intéressants par la longue persistance de leur suspenseur? Les auteurs n'en disent rien. Mais cette conclusion s'impose d'autant plus que partout où la cellule basilaire du suspenseur est ainsi constituée, elle se trouve en relation avec un tissu qui affecte tous les caractères d'un tissu digestif. Ce dernier manque, semble-t-il, dans les cas rarement signalés où l'embryon est dépourvu de suspenseur, comme on peut le voir par les travaux de D.-H. Campbell (11, 12) pour l'*Aglaonema* et le *Spathicarpa;* de W. Hegelmaier (45) pour le *Pistia,* et de R.-W. Smith (98) pour l'*Eriocaulon.*

RÉSUMÉ ET CONCLUSIONS GÉNÉRALES.

1. Le pistil du *Polygonum aviculare* résulte de la concrescence de trois carpelles cohérents par leurs bords, délimitant ainsi une cavité ovarienne unique.

2. Ces trois carpelles ont chacun un faisceau médian qui n'est pas en continuité directe avec les faisceaux de l'axe floral. Un seul de ces carpelles présente, en outre, suivant un de ses bords, un faisceau placentaire caractérisé. C'est le carpelle fertile. Ce faisceau placentaire n'est pas non plus en continuité directe avec les faisceaux de l'axe floral. De rares anastomoses relient ces faisceaux entre eux.

3. A l'état jeune des carpelles, les trois histogènes y sont parfaitement reconnaissables.

4. Les faisceaux médians des carpelles stériles et le faisceau placentaire s'éteignent au niveau de la base des stigmates, tandis que le médian du carpelle fertile s'élève plus haut dans le stigmate dépendant de ce carpelle.

5. C'est uniquement à l'*Ep. e.* du péricarpe qu'incombe le rôle de couche protectrice du fruit et de la graine.

6. L'acropyle est étroitement fermé par suite de la jonction des *Ep. i.* des carpelles au-dessus de la cavité ovarienne.

7. L'unique ovule orthotrope du gynécée est une dépendance latérale basilaire du carpelle fertile. Il est vascularisé par un rameau libéro-ligneux fourni par le faisceau placentaire.

8. Il en résulte qu'il n'est pas la continuation directe du sommet de l'axe floral, mais qu'il est d'origine foliaire. Il est bien une « création nouvelle » au-dessus de l'axe floral qui s'évanouit.

9. Cet ovule présente deux téguments à deux assises chacun, un nucelle qui se résorbe de haut en bas au fur et à mesure du

développement et dont l'*Ep. N.* persiste seul jusqu'à la maturité.

10. Le canal micropylaire, uniformément étroit dans toute sa longueur, est uniquement formé par l'endostome, la secondine dépassant la primine au sommet de l'ovule.

11. L'*Ep. N.* ne présente normalement jamais de cloisonnement tangentiel, même au sommet. Il ne se forme pas de prolongement s'insinuant dans le micropyle, comme c'est le cas dans d'autres *Polygonum*.

12. Le sac embryonnaire en forme d'entonnoir étroit intéresse toute la longueur du nucelle.

13. A l'état adulte, ce sac embryonnaire comprend deux synergides et un œuf qui affectent la disposition typique, un noyau secondaire et trois antipodes.

14. Le noyau secondaire présente une telle analogie, dans sa constitution et dans sa façon de se comporter vis-à-vis des réactifs, avec l'un des corps cellulaires quelconque qui sont renfermés dans le sac embryonnaire, qu'il y a lieu d'attribuer à tout son ensemble la valeur d'une cellule complète qu'on propose de nommer *cellule secondaire*.

15. Les trois antipodes sont disposées à la suite les unes des autres dans le fond du sac embryonnaire.

16. Une hypostase cupuliforme se développe à la chalaze. Elle a pour fonction d'empêcher le passage des matières du sac embryonnaire vers la chalaze, mais de permettre l'introduction, dans le sac embryonnaire, des matériaux nutritifs amenés par le faisceau de la chalaze.

17. L'œuf fécondé ne se cloisonne que sept jours au moins après la pollinisation, alors que l'albumen est déjà entré en voie de formation.

18. L'antipode supérieure, après la fécondation, prend des dimensions considérables en devenant plurinucléée par suite de la fragmentation répétée de son noyau. Elle devient un

organe de sécrétion ou de digestion préparant d'abord les matériaux nécessaires au sac embryonnaire et à l'albumen, digérant ensuite les parties de celui-ci qui doivent être occupées par l'embryon.

19. Cette dernière fonction, l'antipode la partage avec la couche protéique qui se différencie à la périphérie de l'albumen.

20. L'*Ep. N.* persiste jusqu'à la maturité complète de la graine. Il a pour fonction principale de contribuer à la nutrition de l'embryon en voie de développement en lui amenant les produits résultant de la résorption du *Tf. N.*

21. Ces produits passent de l'*Ep. N.* dans l'embryon par l'intermédiaire du suspenseur.

22. L'embryon du *Polygonum aviculare* s'édifie suivant un mode tout à fait semblable à celui décrit pour l'*Habenaria*, peu différent, en somme, de ce qui se passe chez le *Myosurus minimus*. Mais ce mode est totalement différent de celui que l'on a attribué récemment à l'embryogénie du *Polygonum Persicaria*.

23. La graine est attachée au placenta par un pédicelle de plus de deux millimètres de longueur, tordu et replié sur lui-même et le plus souvent rompu.

24. Le spermoderme est constitué par la Primine, la Secondine et le Nucelle. Les tissus frappés de résorption sont l'*Ep. e. S.* et le *Tf. N.*

25. Le spermoderme est mince et membraneux, de couleur rouge-brun due au contenu de l'*Ep. e. P.*

26. L'albumen est abondant, farineux et limité extérieurement par une assise de cellules vides que suit une couche protéique d'une ou deux assises de cellules.

27. L'embryon latéral et arqué est logé le long d'une des arêtes de la graine triquètre. Son plan coïncide avec la bissectrice de l'angle dièdre correspondant.

BIBLIOGRAPHIE

1. **Balicka-Iwanowska, G.-P.** (M^me^). — Contribution à l'étude du sac embryonnaire chez certaines Gamopétales. (*Flora,* 86, 1899.)

2. **Barnes, C.-R.** — The Process of fertilization in *Campanula americana.* (*The Botanical Gazette,* X, 1885.)

3. **Benson Margaret.** — Contributions to the embryology of the Amentiferae, I. (*Trans. Linn. Soc. Bot.* London, 3, 1894.)

4. **Billings, F.-H.** — Beiträge zur Kenntniss der Samenentwicklung. (*Flora,* 88, 1901.)

5. **Braun.** — Bemerkungen über Placentenbildung. (*Sitzungsber. des botan. Vereins für die Provinz Brandenburg,* 1874.)

6. **Brown, W.-H.** — The embryo-sac of Habenaria. (*The Botanical Gazette,* XLVIII, 1909.)

7. **Burns, G.-P.** — Beiträge zur Kenntniss der Stylidaceen. (*Flora,* 87, 1900.)

8. **Butters, F.-K.** — The seeds and seedling of *Caulophyllum thalictroides.* (*Minnesota botanical Studies.* Part. 1; vol. IV, 1909.)

9. **Campbell, D.-H.** — The development of the flower and embryo in *Lilaea Subulata* H.-B.-K. (*Annals of Botany,* 12, 1898.)

10. **Idem.** — Notes on the structure of the embryo-sac in *Sparganium* and *Lysichiton.* (*The Botanical Gazette,* XXVII, 1899.)

11. **Idem.** — Studies on Araceae I. (*Annals of Botany,* 14, 1900.)

12. **Idem.** — Studies on Araceae III. (*Annals of Botany,* 19, 1905.)

13. **Celakovsky, L.-F.** — Ueber die morphologische Bedeutung der Samenknospen. (*Flora,* 63, 1874.)

14. **Idem.** — Vergleichende Darstellung der Placenten in den Fruchtknoten der Phanerogamen. (*Abhandl. Konigl. Böhm. Gessell. Wiss.,* VI, 8. Prague, 1877.)

15. **Chodat, R.** et **Bernard, C.** — Sur le sac embryonnaire de l'*Helosis guyanensis*. (*Journal de Botanique*, 14, 1900.)

16. **Coker, W.-C.** — The development of the seed in the Pontederiaceae. (*The Botanical Gazette*, XLIV, 1907.)

17. **Coulter, J.-M.** and **Chamberlain, Ch.-J.** — Morphology of Angiosperms. Part. II. London, 1904.

18. **D'Hubert, E.** — Recherches sur le sac embryonnaire des plantes grasses. (*Ann. des Sciences nat. bot.*, 8e série, II, 1896.)

19. **Dickson, A.** — Embryogeny of *Tropaeolum speciosum*. (*Journ. of Botany*, 1875.)

20. **Eichler, A.-W.** — Blütendiagramme. II. Band. Leipzig, 1878.

21. **Endlicher** und **Unger.** — Grundzüge der Botanik. Wien, 1843.

22. **Ernst, A.** — Beiträge zur Kenntniss des Embryosackes und des Embryo (Polyembryonie) von *Tulipa Gesneriana L.* (*Flora*, 88, 1901.)

23. **Famitzin, A.** — Embryologische Studien. (*Mém. de l'Acad. imp. des Sc. de Saint-Pétersbourg*, 7e sér., XXVI, no 10, 1879.)

24. **Ferraris, T.** — Ricerche embryologiche sulle Iridacée. (*Annuario del R. Istituto bot. di Roma*, IX, 3, 1902.)

25. **Frye, T.-C** — A morphological study of certain Asclepiadaceae. (*The Botanical Gazette*, XXXIV, 1902.)

26. **Idem.** — The embryo-sac of *Casuarina stricta*. (*The Botanical Gazette*, XXXV, 1903.)

27. **Goldfluss, Mathilde.** — Sur la structure et les fonctions de l'assise épithéliale et des antipodes chez les Composées. (*Journal de Botanique*, 12 et 13, 1898-1899.)

28. **Gow, J.-E.** — Observations on the morphology of the Aroids. (*The Botanical Gazette*, LVI, 1913.)

29. **Grüss, J.** — Ueber den Eintritt von Diastasen in das Endosperm. (*Berichte d. deutsch. bot. Gesellsch.*, XI, 1893.)

30. **Guérin, P.** — Sur le sac embryonnaire et en particulier les antipodes des Gentianes. (*Journal de Botanique*, 17, 1903.)

31. **Guignard, L.** — Recherches d'embryogénie végétale comparée, I. Légumineuses. (*Ann. des Sc. nat. bot.*, 6e sér., XII, 1881.)

32. **Idem.** — Sur l'origine du sac embryonnaire et le rôle des antipodes. (*Bull. de la Société bot. de France*, 28, 1881.)

33. **Guignard, L.** — Recherches sur le sac embryonnaire des Phanérogames Angiospermes. (*Ann. des Sc. nat. bot.*, 6e sér., XIII, 1882.)

34. **Idem.** — Observations sur les Santalacées. (*Ann. des Sc. nat. bot.*, 7e sér., II, 1885.)

35. **Idem.** — Recherches sur la localisation des principes actifs des Crucifères. (*Journal de Botanique*, 4, 1890.)

36. **Idem.** — Recherches sur le développement de la graine et en particulier du tégument séminal. (*Journal de Botanique*, 7, 1893.)

37. **Idem.** — Double fécondation chez les Renonculacées. (*Journal de Botanique*, 15, 1901.)

38. **Idem.** — La double fécondation chez les Solanées. (*Journal de Botanique*, 16, 1902.)

39. **Guillaume, C.** — Étude anatomique du péricarpe et du tégument séminal des Polygonacées. (*Thèse*, Issoudun, 1909.)

40. **Haberlandt, G.** — Die Kleberschicht des Gras-Endosperms als Diastase ausscheidendes Drüsengewebe. (*Berichte d. deutsch bot. Gesellsch.*, VIII, 1890.)

41. **Hall, J.-G.** — An embryological study of *Limnocharis emarginata*. (*The Botanical Gazette*, XXXIII, 1902.)

42. **Hannig, E.** — Zur Physiologie pflanzlicher Embryonen, II. Ueber das zustandekommen der Lagerung der Keimlinge bei den Cruciferen-Embryonen. (*Botanische Zeitung*, 64, 1, 1, 1906.)

43. **Hanstein, J.** — Die Entwicklung des Keimes der Monokotylen und Dikotylen. (*Botan Abhandlungen*, 1. Bonn, 1870.)

44. **Harz, E.-D.** — Landwirthschaftliche Samenkunde. Berlin, 1885.

45. **Hegelmaier, F.** — Zur Entwickelungsgeschichte monocotyledoner Keime. (*Botanische Zeitung*, 32, 1874.)

46. **Idem.** — Vergleichende Untersuchungen über Entwikelung dicotyledoner Keime. Stuttgart, 1878.

47. **Idem.** — Ueber den Keimsack einiger Compositen und dessen Umhüllung. (*Botanische Zeitung*, 1899.)

48. **Hertwig, O.** — La Cellule et les Tissus. Traduction française de **Julin**. Paris, 1894.

49. **Holferty, G.-M.** — Ovule and Embryo of *Potamogeton natans*. (*The Botanical Gazette*, XXXI, 1901.)

50. **Humphrey, J.-E.** — The development of the seed in Scitamineæ. (*Annals of Botany*, 10, 1896.)

51. **Huss, H.-A.** — Beiträge zur Morphologie und Physiologie der Antipoden. (*Beihefte z. Bot. Centralbl.*, XX, 1, 2, 1906.)

52. **Ikeda, T.** — Studies in the physiological function of antipodals and related phenomena of fertilization in Liliaceæ : 1. *Tricyrtis hirta*. (*Bull. Coll. Agr. Imp. Univ. Tokyo*, 5, 1902.)

53 **Johnson, D.-S.** — On the development of certain Piperaceæ (*The Botanical Gazette*, XXXIV, 1902.)

54. **Johnson, T.** — The nursing of the embryo and some other points in *Myzodendron punctulatum* Banks et Sol. (*Annals of Botany*, 3, 1889.)

55. **Joxe, A.** — Sur l'ouverture des fruits indéhiscents à la germination. (*Ann. des Sc. nat. bot.*, 9e sér., t. XV, 1912.)

56. **Juel, H.-O.** — Parthenogenesis bei *Antennaria alpina* (L.) R. Br. (*Bot. Centralbl.*, 74, 1898.)

57. **Kraus, Gr.** — Ueber den Bau trockner Pericarpien. (*Jahrb. f. wissensch. Botanik*, V, 1, 1866.)

58. **Lang, F.-X.** — Untersuchungen über Morphologie, Anatomie und Samenentwicklung von Polypompholyx und *Biblis gigantea*. (*Flora*, 88, 1901.)

59. **Lavialle, P.** — Recherches sur le développement de l'ovaire en fruit chez les Composées. (*Ann. des Sc. nat. bot.*, 9e sér., XV, 1912.)

60. **Leavitt, R.-G.** — Notes on the Embryology of some New-England Orchids. (*Rhodora*, 3, 1901.)

61. **Le Monnier, G.** — Recherches sur la nervation de la graine. (*Ann. des Sc. nat. bot.*, 5e sér., XVI, 1872.)

62. **Lindau, G.** — Zur Entwicklungsgeschichte einiger Samen. (*Ber. d. deutsch. bot. Gesellsch.*, IX, 1891.)

63. **Lloyd, F.-E.** — The comparative embryology of the Rubiaceæ. (*Bull. Torr. bot. Club*, 28, 1899.)

64. **Idem.** — The comparative embryology of the Rubiaceæ. (*Mém. Torr. bot. Club*, 8, 1902.)

65. **Lonay, Hyacinthe.** — Contributions à l'anatomie des Renonculacées : Structure des péricarpes et des spermodermes. (*Mémoires de la Soc. roy. des Sc. de Liége*, 3e sér., III, 1900, et *Archives de l'Inst. bot. de l'Univ. de Liége*, III, 1901.)

66. **Lonay, Hyac.** — Recherches anatomiques sur les feuilles de l'*Ornithogalum bracteatum* Ait. (*Mémoires de la Soc. roy. des Sc. de Liége,* 3e sér., IV, 1902, et *Archives de l'Inst. bot. de l'Univ. de Liége,* IV, 1907.)

67. **Idem.** — Contribution à l'étude des relations entre la structure des différentes parties de l'ovule et la nutrition générale de celui-ci. (*Bull. de la Classe des Sc. de l'Acad. roy. de Belgique,* 1922.)

68. **Lötscher, K.** — Ueber den Bau und die Funktion der Antipoden in der Angiospermen-Samenanlage. (*Flora,* 94, 1905.)

69. **Merrel, W.-D.** — A contribution to the life-history of *Silphium.* (*The Botanical Gazette,* XXIX, 1900.)

70. **Meyen.** — Neues System der Pflanzen-Physiologie. Bd. III, 1839.

71. **Mücke, M.** — Ueber den Bau und die Entwicklung der Früchte und über die Herkunft von *Acorus calamus,* L. (*Botanische Zeitung,* 66, 1, 1, 1908.)

72. **Muller, Ch.** — Recherches sur le développement de l'embryon végétal. (*Ann. des Sc. nat. bot.,* 3e sér., IX, 1848.)

73. **Murbeck, S.** — Ueber die Embryologie von *Ruppia rostellata* Koch. (*Köngl. Svensk. Vetensk. Akad. Handl.,* 36, 1902.)

74. **Nitzschke, Johannes.** — Beiträge zur Phylogenie der Monokotylen gegründet auf der Embryosackentwicklung apokarpen Nymphaeaceen und Helobien. (*Beiträge zur Biologie der Pflanzen,* XII, 2, 1914.)

75. **Osterwalder, Ad.** — Beiträge zur Embryologie von *Aconitum Napellus,* L. (*Flora,* 85, 1898.)

76. **Overton, J.-B.** — Parthenogenesis in *Thalictrum purpurascens.* (*The Botanical Gazette,* XXXIII, 1902.)

77. **Pace Lula.** — Fertilization in Cypripedium. (*The Botanical Gazette,* XLIV, 1907.)

78. **Idem.** — Apogamy in Atamosco. (*The Botanical Gazette,* LVI, 1913.)

79. **Payer.** — Traité d'Organogénie comparée de la fleur. Paris, 1857.

80. **Peltrisot, C.-N.** — Développement et structure de la graine des Ericacées. (*Journal de Botanique,* 18, 1904.)

81. **Perotti, Rosa.** — Contributo all' embriologia delle « Dianthaceæ ». (*Annali di Botanica,* 11, 1913.)

82. **Pfeffer, W.** — Physiologie végétale. Traduction française de **Jean Friedel.** Paris, 1904-1914.

83. **Rombach, Sara.** — Die Entwicklung der Samenknospe bei den Crassulaceen. (*Recueil des travaux bot. néerlandais,* VIII, 2, 1911.)

84. **Rosenberg, O.** — Ueber die Embryologie von *Zostera Marina* L. (*Meddelanden fr. Stockholms Högsk. bot. Inst.,* IV, 1901.)

85. **Rosendahl, C.-O.** — Embryo-sac development and embryology of *Symplocarpus fœtidus.* (*Minnesota botanical Studies,* Part. 1, vol. IV, 1909.)

86. **Schacht, H.** — Entwickelungsgeschichte des Pflanzen-Embryon. Amsterdam, 1850.

87. **Idem.** — Observations sur le développement de l'embryon dans le *Tropaeolum majus* L. (*Ann. des Sc. nat. bot.,* 4e sér., IV, 1855.)

88. **Schaffner, J.-H.** — Contribution to the life-history of *Sagittaria variabilis.* (*The Botanical Gazette,* XXIII, 1897.)

89. **Idem** — A contribution to the life-history and cytology of *Erythronium.* (*The Botanical Gazette,* XXXI, 1901.)

90. **Schmid, Ed.** — Beiträge zur Entwicklungsgeschichte der Scrophulariaceæ. (*Beihefte z. bot. Centralbl.,* XX, 1, 3, 1906.)

91. **Schweiger, J.** — Vergleichende Untersuchungen über *Sarracenia* und *Cephalotus follicularis* betreffs ihrer etwaigen systematischen Verwandtschaft. (*Beihefte z. bot. Centralbl.,* XXV, 2, 3, 1909.)

92. **Schwere, S.** — Entwickelungsgeschichte der Frucht von *Taraxacum officinale* Web. Ein Beitrag zur Embryologie der Compositen. (*Flora,* 82, 1896.)

93. **Servettaz.** — Monographie des Eléagnacées, 2e partie. (*Beihefte z. bot. Centralbl.,* XXV, 2, 2, 1909.)

94. **Sharp, L.-W.** — The embryo-sac of *Physostegia.* (*The Botanical Gazette,* LII, 1911.)

95. **Idem.** — The Orchid embryo-sac. (*The Botanical Gazette,* LIV, 1912.)

96. **Shreve.** — The development and anatomy of *Sarracenia purpurea.* (*The Botanical Gazette,* XLII, 1906.)

97. **Sirrine, Emma.** — Structure of the seed coats of Polygonaceæ. (*Proceed. of the Yowa Acad. of Sc. for 1891,* II, Des Moines, 1895.)

98. **Smith, R.-W.** — The floral development and embryogeny of *Eriocaulon septangulare.* (*The Botanical Gazette,* XLIX, 1910.)

99. **Souèges, René.** — Développement et structure du tégument séminal chez les Solanacées. (*Ann. des Sc. nat. bot.,* 9e sér., VI, 1907.)

100. **Souèges, René.** — Sur la présence de protoplasme supérieur (ergastoplasme) dans les antipodes des Renonculacées. (*Bull. de la Soc. bot. de France,* 57, 1910.)

101. **Idem.** — Recherches sur l'embryogénie des Renonculacées. (*Bull. de de la Soc bot. de France,* 57, 58, 59, 60 et 61, 1910-1914.)

102. **Idem.** — Développement de l'ovule et du sac embryonnaire chez les Adonis. (*Anatomischer Anzeiger,* 41, 1912. Jena.)

103. **Idem.** — Recherches sur l'embryogénie des Polygonacées. (*Bull. de la Soc. bot. de France,* 66 et 67, 1919-1920.)

104. **Stevens, N.-E.** — The morphology of the seed of Buckweath. (*The Botanical Gazette,* LIII, 1912.)

105. **Strasburger, Ed.** — Die Angiospermen und die Gymnospermen. Jena, 1879.

106 **Idem.** — Zellbildung und Zelltheilung. 3. Auflage. Jena, 1880.

107. **Idem.** — Die Controversen der indirecten kerntheilung. (*Arch. f. mikrosk. Anatomie,* XXIII. Bonn, 1884.)

108. **Strasburger, Noll, Schenk** und **Schimper.** — Lehrbuch der Botanik. 5. Auflage. Jena, 1902.)

109. **Treub, M.** — Notes sur l'embryogénie de quelques Orchidées. (*Naturkund. Verhandl. Konigl. Akad.,* 21. Amsterdam, 1879)

110. **Idem.** — Notes sur l'embryon, le sac embryonnaire et l'ovule, I. *Peristylis grandis.* (*Ann. du Jard. bot. de Buitenzorg,* III, 1, 1882.)

111. **Idem.** — Notes sur l'embryon, le sac embryonnaire et l'ovule, III et IV. (*Ann. du Jard. bot. de Buitenzorg,* III, 2, 1883.)

112. **Treviranus, L.-C.** — Von der Entwicklung des Embryo. Berlin, 1816.

113. **Tulasne, L.-R.** — Nouvelles études d'embryogénie végétale. (*Ann. des Sc. nat. bot.,* 4e sér., IV, 1855.)

114. **Van Tieghem, Ph.** — Structure du pistil des Primulacées et des Théophrastées (*Ann. des Sc. nat. bot.,* 5e sér., XII, 1869.)

115. **Idem.** — Recherches sur la structure du pistil et sur l'anatomie comparée de la fleur. Paris, 1871.

116. **Idem.** — Recherches physiologiques sur la germination. (*Ann. des Sc. nat. bot.,* 5e sér., XVII, 1873.)

117. **Idem.** — Sur la digestion de l'albumen. (*Ann. des Sc. nat. bot,* 6e sér., IV, 1876)

118. **Van Tieghem, Ph.** — Traité de Botanique, 2e édit. Paris, 1891.

119. **Idem.** — L'œuf des plantes considéré comme base de leur classification. (*Ann. des Sc. nat. bot.*, 8e sér., XIV, 1901.)

120. **Idem.** — L'hypostase, sa structure et son rôle constants, sa position et sa forme variables. (*Bull. du Museum*, VII, 1901.)

121. **Idem.** — L'hypostase dans le fruit et dans la graine. (*Bull. du Muséum*, VIII, 1902.)

122 **Idem.** — L'hypostase dans l'ovule et dans la graine des Rosacées (*Ann. des Sc nat. bot.*, 8e sér., XVI, 1902.)

123. **Idem.** — Sur l'hypostase. (*Ann. des Sc. nat. bot.*, 8e sér., XVII, 1903.)

124. **Ward, H.-Marshall.** — A contribution to our knowledge of the embryo-sac in Angiosperms. (*Journ. of the Linn. Soc. Bot. London*, 17, 1880.)

125. **Idem.** — On the embryo-sac and development of *Gymnadenia conopsea*. (*Quat. Journ. of micr. Sc.*, 20, 1880.)

126. **Warming, Eug.** — De l'ovule. (*Ann. des Sc. nat. bot.*, 6e sér., V, 1877.)

127. **Idem.** — Observations sur la valeur systématique de l'ovule. Köbenhavn, 1913.

128. **Warming** und **Johannsen.** — Lehrbuch der allgemeinen Botanik nach der vierte dänischen Ausgabe übersetzt von **E.-P. Meinecke.** Berlin, 1909.

129. **Westermaier, M.** — Zur Embryologie der Phanerogamen, insbesondere über die sogenannten Antipoden. (*Nova Acta der Kaiserl. Léopold. Carol. deutsche Akad. der Naturf.*, 57. Bd., 1890.)

130. **Wiegand, K.-M.** — The development of the embryo-sac in some Monocotyledonous plants. (*The Botanical Gazette*, XXX, 1900.)

131. **Wylie, R.-B.** — The morphology of *Elodea canadensis*. (*The Botanical Gazette*, XXXVII, 1904.)

PLANCHE I.

EXPLICATIONS DE LA PLANCHE I.

Fig. 1. — Coupe longitudinale du gynécée naissant dans un bouton de fleur de 0mm1. $^{173}/_{1}$ (pp. 12 et 23).

Fig. 2. — Coupe longitudinale du gynécée dans un bouton de fleur un peu plus avancé. $^{240}/_{1}$ (pp. 12 et 23).

Fig. 3. — Même stade que le précédent en perspective. $^{173}/_{1}$ (pp. 12 et 23).

Fig. 4. — Coupe longitudinale du gynécée d'un bouton de fleur de 0mm5. $^{173}/_{1}$ (pp. 12 et 24).

Fig. 5. — Coupe longitudinale du gynécée d'un bouton de fleur de 0mm7. Dessin d'ensemble. $^{22}/_{1}$ (pp. 12 et 24).

Fig. 6. — Ovule de la coupe précédente. $^{173}/_{1}$ (p. 24).

Fig. 7. — Coupe longitudinale du pistil d'un bouton de fleur de 1mm2. Dessin d'ensemble. $^{55}/_{1}$ (pp. 25 et 26).

Fig. 8. — Ovule de la coupe précédente. $^{165}/_{1}$ (p. 25).

Fig. 9. — Coupe longitudinale de l'ovule d'un bouton de fleur peu avant l'anthèse. $^{173}/_{1}$ (p. 25).

Fig. 10. — Coupe longitudinale du pistil d'une fleur épanouie. Dessin d'ensemble. $^{28}/_{1}$ (p. 27)

Fig. 11. — Ovule d'une coupe semblable. $^{173}/_{1}$ (p. 27).

N. B. — Les coupes 9 et 11 sont perpendiculaires l'une à l'autre; la première peut être dite de profil, la seconde de face.

Fig. 12. — Coupe transversale du pistil d'une fleur épanouie, au niveau de l'acropyle. Dessin d'ensemble. $^{22}/_{1}$ (p. 12).

Fig. 13. — Acropyle de la coupe précédente. $^{173}/_{1}$ (p. 12).

Fig. 14. — Coupe transversale de la même fleur au niveau moyen du gynécée. Dessin d'ensemble. $^{22}/_{1}$ (pp. 13 et 27).

Fig. 15. — Détails du péricarpe de la même coupe. $^{173}/_{1}$ (p. 13).

Fig. 16. — Détails de l'ovule de la même coupe. $^{173}/_{1}$ (p. 27).

Fig. 17 et 18. — (Voir planche II.)

Fig. 19. — Coupe longitudinale d'une fleur peu de temps avant l'anthèse. $^{55}/_{1}$:

a) passage du faisceau central du pédoncule dans l'hypanthe; *b*) et *c*) connexions de ce faisceau avec celui de l'ovule (p. 18). Dessin d'ensemble.

Fig. 19*b*. — Coupe longitudinale d'une fleur fécondée depuis plus de quinze jours. Dessin d'ensemble. $^{55}/_{1}$ (p. 18).

Fig. 20. — Coupe transversale médiane d'un ovaire fécondé depuis quinze jours. Dessin d'ensemble. $^{55}/_{1}$ (p. 14).

Fig. 21. — Détails de la coupe précédente. $^{173}/_{1}$ (p. 14).

Pl. I

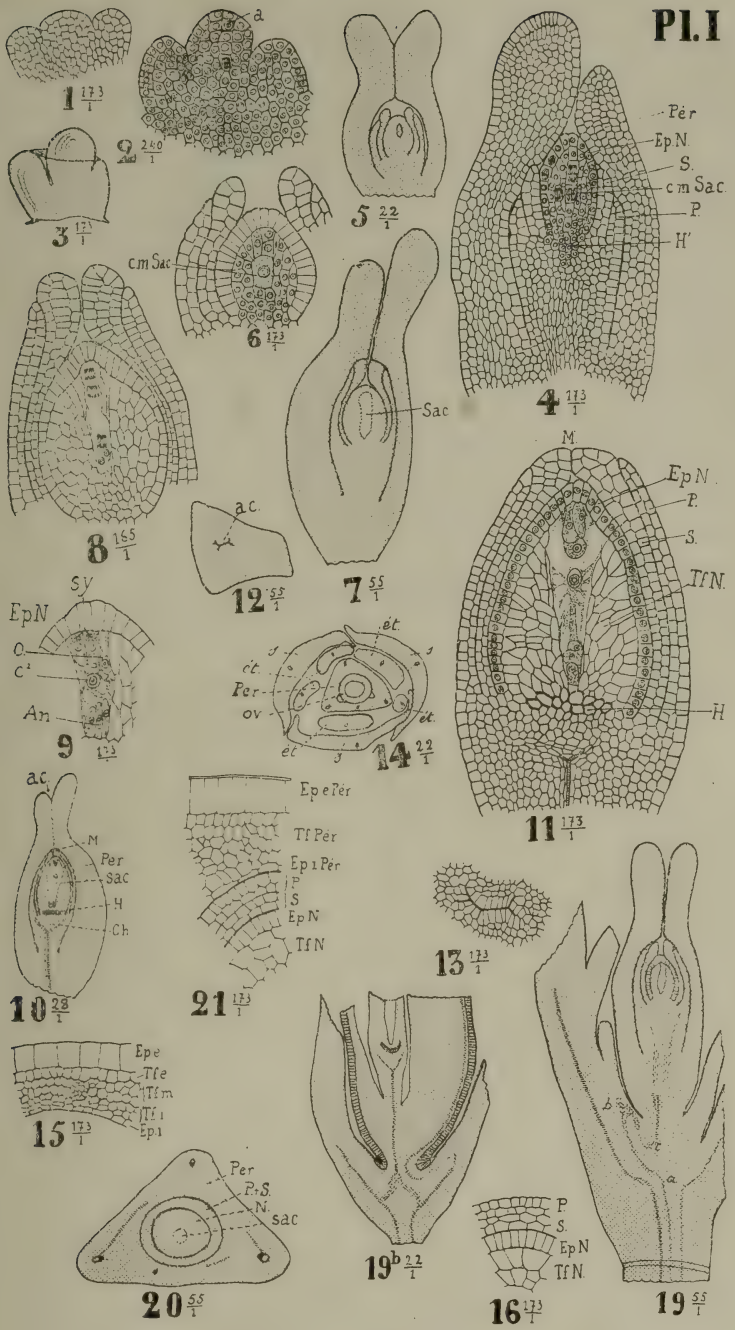

1 173/1
a
2 240/1
3 173/1
5 22/1
Pér
Ep.N
S.
c m Sac
P.
H'
cm Sac
6 173/1
4 173/1
Sac
8 165/1
ac.
12 55/1
7 55/1
M
Ep.N
P.
S.
Tf.N.
H
Sy
Ep.N
O.
c'
An
9 173/1
ét.
ct.
Per
ov
14 22/1
ac.
M
Per
sac
H
Ch
10 28/1
Epe Pér
Tf Per
Ep1 Pér
P
S
Ep.N
Tf.N
21 173/1
11 173/1
13 173/1
Epe
Tfe
Tfm
Tf1
Ep1
15 173/1
Per
P.S.
N.
sac
20 55/1
19b 22/1
P.
S.
Ep.N
Tf.N
16 173/1
19 55/1

PLANCHE II.

EXPLICATIONS DE LA PLANCHE II.

Fig. 17. — Coupe longitudinale du pistil au début de la fécondation. Dessin d'ensemble. $^{28}/_{1}$ (p. 30).

Fig. 18. — Ovule de la même coupe. $^{173}/_{1}$ (p. 30).

Fig. 19, 19*b*, 20 et 21. — (Voir planche I.)

Fig. 22. — Coupe longitudinale d'un pistil fécondé de près de 2 mm. de hauteur. $^{173}/_{1}$ (p. 14).

Fig. 23. — Coupe longitudinale de l'ovule contenu dans le pistil précédent. $^{173}/_{1}$ (p. 32).

Fig. 24. — Coupe transversale d'un pistil semblable. Dessin d'ensemble. $^{22}/_{1}$ (pp. 14 et 18).

Fig. 25. — Détails du péricarpe de la coupe précédente. $^{173}/_{1}$ (p. 14).

Fig. 26. — Détails du spermoderme de la même coupe. $^{173}/_{1}$.

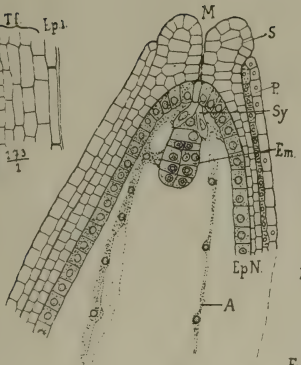
Fig. 27. — Schéma du parcours des faisceaux dans un pistil de cet âge. $^{13}/_{1}$ (p. 18).

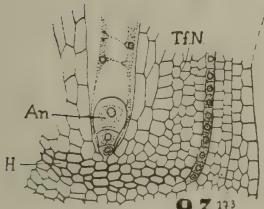
Fig. 27*b*. — Reconstitution schématique d'un fruit montrant le même parcours en perspective. $^{23}/_{1}$ (p. 20).

Fig. 28 à 33. — (Voir planche III.)

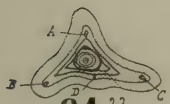
Fig. 34. — Embryon d'une coupe pareille à celle de la fig. 33. $^{173}/_{1}$ (p. 36).

22 $\frac{133}{1}$

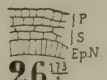




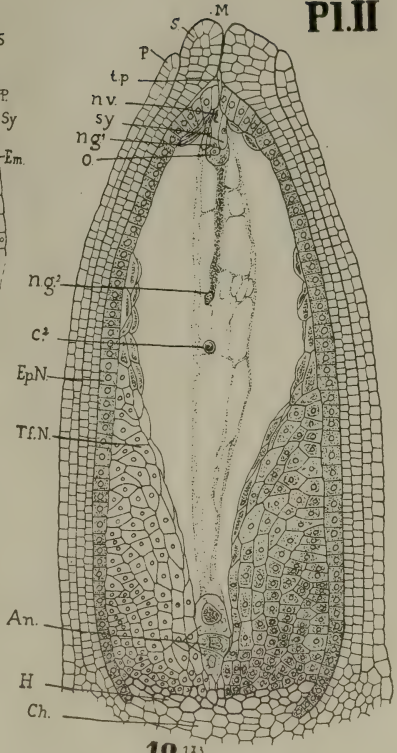
23 $\frac{133}{1}$



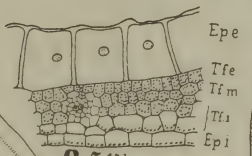
24 $\frac{22}{1}$



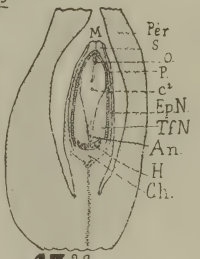
26 $\frac{133}{1}$



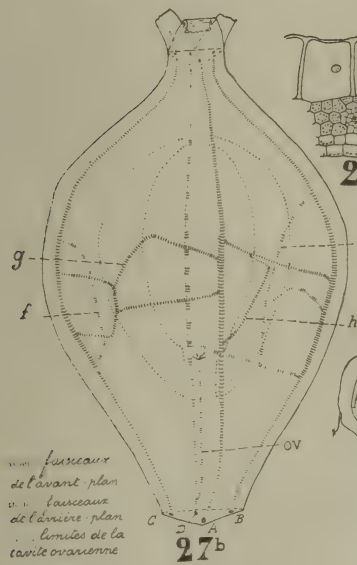
18 $\frac{133}{1}$



25 $\frac{133}{1}$

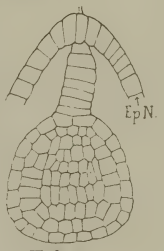


17 $\frac{28}{1}$



27b

27



34 $\frac{133}{1}$

PLANCHE III.

EXPLICATIONS DE LA PLANCHE III.

Fig. 28. — Coupe longitudinale d'un jeune fruit de près de $2^{mm}5$. Dessin d'ensemble. $^{28}/_{1}$ (p. 33).

Fig. 29. — Sommet de l'ovule de la même coupe. $^{173}/_{1}$ (p. 33).

Fig. 30. — Portion de la région moyenne du même ovule. $^{173}/_{1}$ (p. 33).

Fig. 31. — Base du même ovule. $^{173}/_{1}$ (p. 33).

Fig. 32. — Coupe transversale d'un fruit mûr au niveau de la chalaze. Dessin d'ensemble. $^{28}/_{1}$ (p. 36).

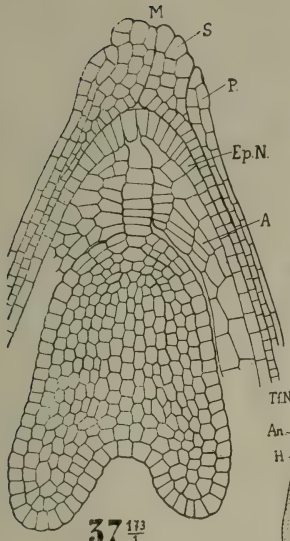
Fig. 33. — Coupe longitudinale d'un fruit un peu plus âgé que celui de la fig. 28. Dessin d'ensemble. $^{28}/_{1}$ (p. 37).

Fig. 34. — (Voir planche II.)

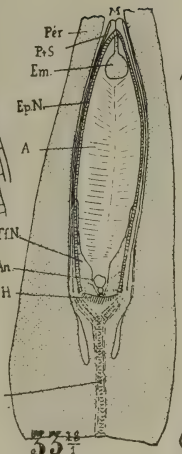
Fig. 35. — Portion de la région moyenne de l'ovule de la même coupe. $^{173}/_{1}$. (p. 37).

Fig. 36. — Coupe longitudinale d'un jeune fruit de $2^{mm}8$. Dessin d'ensemble. $^{28}/_{1}$ (p. 37).

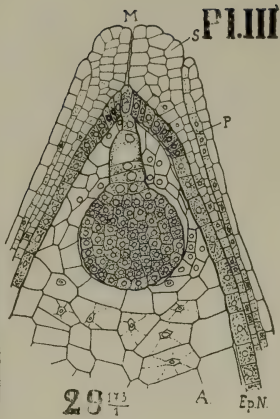
Fig. 37. — Sommet de l'ovule de la coupe précédente. $^{173}/_{1}$ (p. 38).



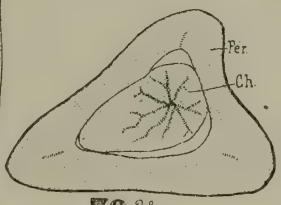
37 $\frac{173}{1}$



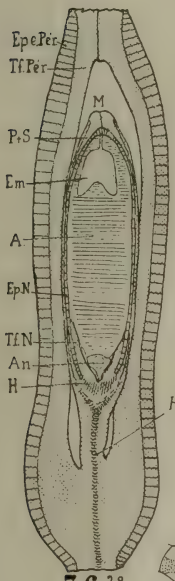
33 $\frac{14}{1}$



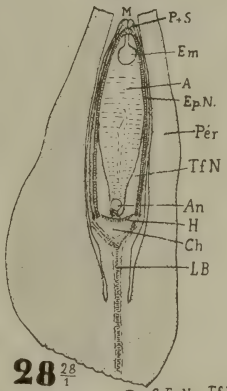
29 $\frac{173}{1}$



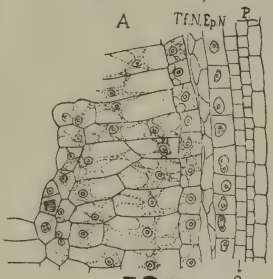
32 $\frac{28}{1}$



36 $\frac{28}{1}$

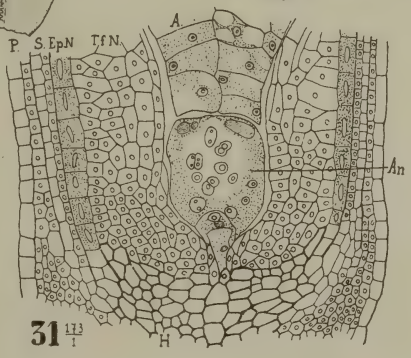


28 $\frac{28}{1}$



30 $\frac{173}{1}$

35 $\frac{173}{1}$



31 $\frac{173}{1}$

PLANCHE IV.

EXPLICATIONS DE LA PLANCHE IV.

Fig. 38. — Base de l'ovule de la coupe de la fig. 36. $^{173}/_{1}$ (p. 38)

Fig. 39. — Base d'un ovule un peu plus âgé. $^{173}/_{1}$ (p. 39).

Fig. 40. — Autre partie de cette région basilaire. $^{173}/_{1}$ (p. 39).

Fig. 41. — Akène mûr couché sur sa face large. $^{12}/_{1}$ (p. 15).

Fig. 42. — Coupe transversale dans le péricarpe d'un akène presque complètement développé. $^{173}/_{1}$ (p. 15).

Fig. 43. — Coupe transversale du spermoderme de l'ovule contenu dans ce même akène. $^{173}/_{1}$ (p. 38).

Fig. 44. — Coupe longitudinale d'un jeune fruit arrivé à sa taille définitive, mais dont l'ovule ne mesure encore que 2 mm. Dessin d'ensemble. $^{22}/_{1}$ (p. 40).

Fig. 45. — Coupe longitudinale d'un ovule plus âgé ayant 2mm15. Dessin d'ensemble. $^{22}/_{1}$ (p. 40).

Fig. 46 et 47. — (Voir planche V.)

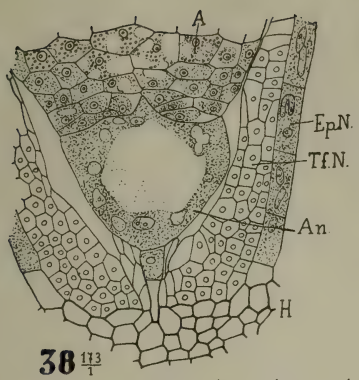
Fig. 48. — Coupe longitudinale d'un jeune fruit dont l'ovule est arrivé au terme de sa croissance (2mm23). Dessin d'ensemble. $^{22}/_{1}$ (p. 41).

Fig. 49. — Jeune coiffe de l'embryon de cette coupe. $^{173}/_{1}$ (p. 41).

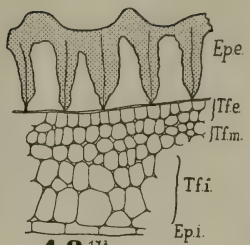
Fig. 50 à 62. — (Voir planche V.)

Fig. 63. — Coupe transversale du spermoderme d'une graine sèche faite à sec et traitée par la potasse à froid. $^{173}/_{1}$ (p. 43).

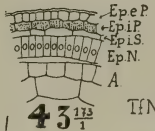
Fig. 64. — Cellules de l'albumen de la coupe représentée par la fig. 52. $^{173}/_{1}$ (p. 43).



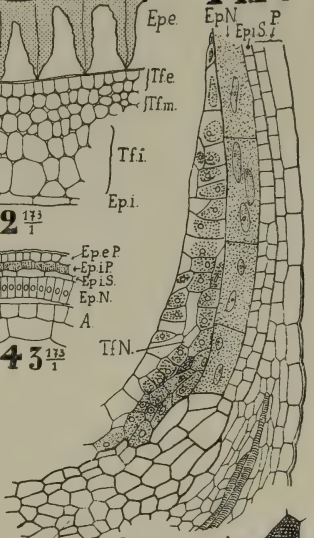
38 $\frac{173}{1}$



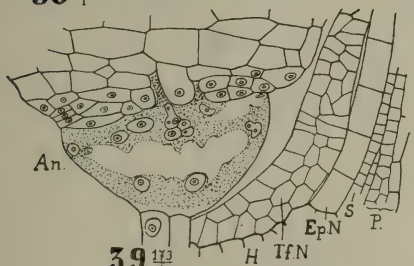
42 $\frac{173}{1}$



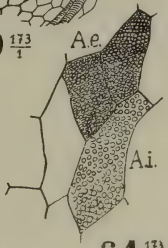
43 $\frac{173}{1}$



40 $\frac{173}{1}$

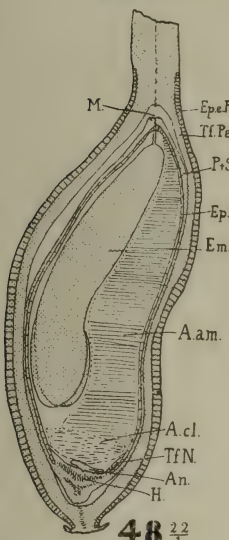


39 $\frac{173}{1}$

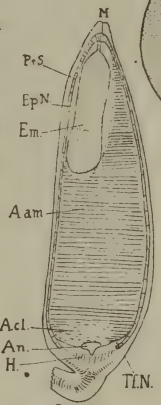


64 $\frac{173}{1}$

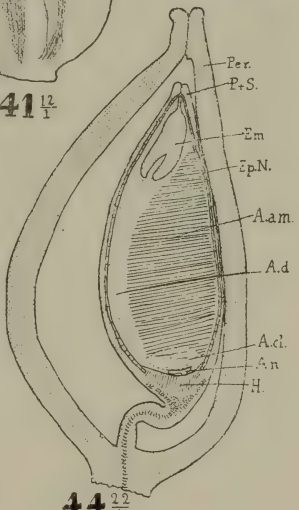
41 $\frac{12}{1}$



48 $\frac{22}{1}$

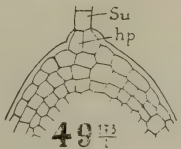


45 $\frac{22}{1}$



44 $\frac{22}{1}$

63 $\frac{173}{1}$



49 $\frac{173}{1}$

PLANCHE V.

EXPLICATIONS DE LA PLANCHE V.

Fig. 46. — Sommet de l'ovule de la fig. 45. $^{173}/_{1}$ (p. 40).

Fig. 47. — Base de cet ovule. $^{173}/_{1}$ (p. 40).

Fig. 48 et 49. — (Voir planche IV.)

Fig. 50. — Base de l'ovule de la fig. 48. $^{173}/_{1}$ (p. 41).

Fig 51. — Portion de la région moyenne de cet ovule. $^{173}/_{1}$ (p. 41).

Fig. 52. — Coupe transversale d'un fruit semblable à celui de la fig. 48, avec le périanthe (*s.*). Dessin d'ensemble. $^{22}/_{1}$ (pp. 16, 41 et 43).

Fig. 53. — Détails du péricarpe de la coupe précédente. $^{173}/_{1}$ (p. 16).

Fig. 54. — Détails de structure de la graine de la même coupe. $^{173}/_{1}$ (p. 42).

Fig. 55. — *Ep. e* du péricarpe d'un fruit semblable, vu de face tout à la surface. $^{173}/_{1}$ (pp. 14 et 17).

Fig. 56. — Le même vu de face au niveau du tiers externe de sa hauteur. $^{173}/_{1}$ (p. 17).

Fig. 57. — Vue profonde de face du même. $^{173}/_{1}$ (pp. 14 et 17).

Fig. 58. — *Ep. e. P.* d'une graine mûre, isolé et vu de face après macération. $^{173}/_{1}$ (p. 42).

Fig. 59. — *Ep. i. P.* vu de face dans les mêmes conditions. $^{173}/_{1}$ (p. 42).

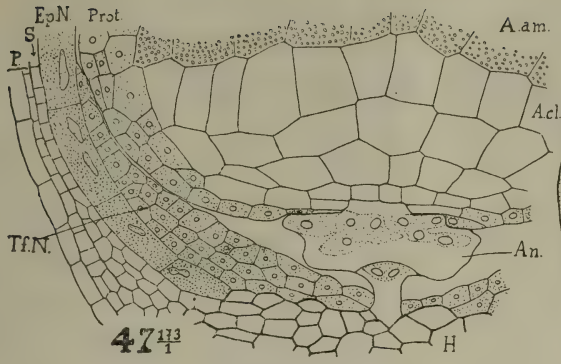
Fig. 60. — *Ep. i. S.* id. id. $^{173}/_{1}$ (p. 42).

Fig. 61. — Coupe transversale du péricarpe d'un akène sec. $^{173}/_{1}$ (p. 17).

Fig. 62. — Coupe transversale d'une graine sèche faite à sec et montée dans l'eau. $^{173}/_{1}$ (p. 43).

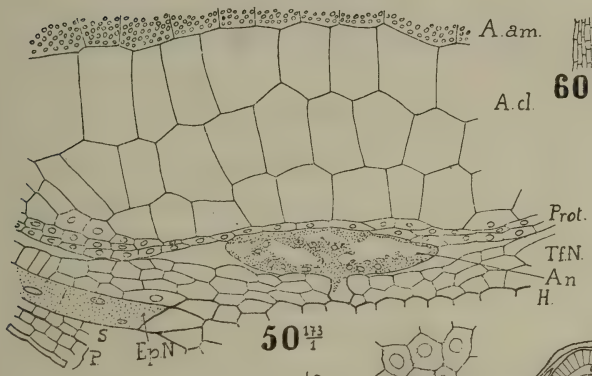
Fig. 63 et 64. — (Voir planche IV.)

Fig. 65. — Embryon isolé de la graine mûre. Dessin d'ensemble. $^{22}/_{1}$ (p. 43).

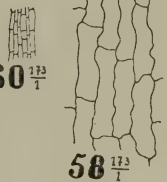


47 $\frac{173}{1}$

65 $\frac{22}{1}$



50 $\frac{173}{1}$



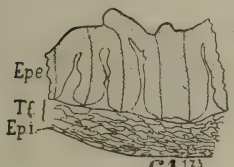
58 $\frac{173}{1}$

60 $\frac{173}{1}$

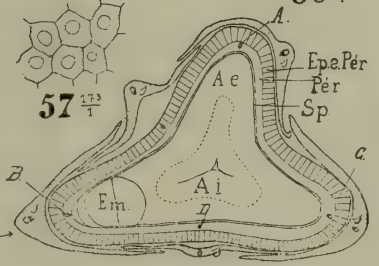
59 $\frac{173}{1}$

57 $\frac{173}{1}$

55 $\frac{173}{1}$



61 $\frac{173}{1}$

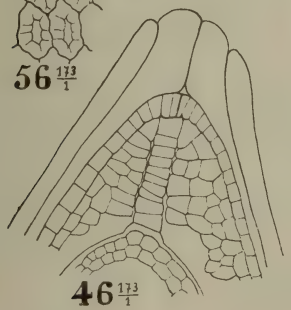


52 $\frac{22}{1}$

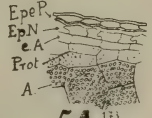
56 $\frac{173}{1}$

53 $\frac{173}{1}$

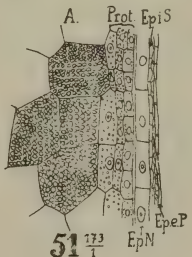
62 $\frac{173}{1}$



46 $\frac{173}{1}$



54 $\frac{173}{1}$



51 $\frac{173}{1}$

TABLE DES MATIÈRES

Pages.

INTRODUCTION 3

Explication des abréviations 8

CHAPITRE I. — **Le Péricarpe** 11

§ 1. Carpelles dans le bouton floral 11

§ 2. Carpelles dans la fleur épanouie 13

§ 3. Développement des carpelles après la fécondation . . . 14

§ 4. Péricarpe mûr 16

§ 5. Parcours des faisceaux dans le Péricarpe 18

CHAPITRE II. — **Le Spermoderme** 23

§ 1. Ovule dans le bouton floral 23

§ 2. Ovule adulte 27

§ 3. Développement de l'ovule après la fécondation 29

Étape *A*. Fécondation de l'albumen 30

Étape *B*. Fécondation de l'œuf 31

Étape *C*. Organisation de l'albumen en tissu 33

Étape *D*. Comblement de l'albumen 36

Étape *E*. Formation de l'amidon dans l'albumen . . . 37

Étape *F*. Différenciation des cellules claires de l'albumen. 39

Étape *G*. Courbure de l'embryon 40

Étape *H*. Résorption de l'*Ep. i. p.* 40

Étape *I*. Résorption des cellules claires de l'albumen . 41

Étape *K*. Comblement par les Cotylédons de l'espace ainsi formé 42

§ 5 La graine mûre 42

CHAPITRE III. — **Note critique et historique** 44

Résumé et conclusions générales 78

Bibliographie 81

Explication des planches 90

Table des matières 109

MCZ ERNST MAYR LIBRARY
3 2044 128 439 205